Université de Provence — 2009-2010

Licence MI — 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Corrigé du partiel 3

27 novembre 2009

Durée : 2 heures — *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

1. Soit $f_2(x) = x^2 + x - 1$. Montrer que l'équation $f_2(x) = 0$ admet une solution **positive unique**, notée α_2, et montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha_2 < \dfrac{3}{4}$.

Réponse : Comme $f_2'(x) = 2x + 1$ est strictement positif pour tout $x \in [0, +\infty[$, et comme $f_2(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$, l'application f_2 est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $[-1 + \infty[$, l'équation $f_2(x) = 0$ admet une solution positive unique qu'on appelle α_2.

L'inégalité $\dfrac{1}{2} < \alpha_2 < \dfrac{3}{4}$ équivaut à $f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) < f_2(\alpha_2) < f_2\left(\dfrac{3}{4}\right)$, et elle est vraie parce que $f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $f_2(\alpha_2) = 0$ et $f_2\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{16}$.

2. Étant donné $n \geq 2$ on définit f_n par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

2.1. Montrer que f_n est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

Réponse : Comme $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$ est strictement positif pour tout $x \in [0, +\infty[$, et comme $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, l'application f_n est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

2.2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution **positive unique** α_n.

Réponse : Compte tenu que 0 appartient à $[-1 + \infty[$, il a un antécédent unique (par f_n) dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

2.3. Montrer que $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha_n)^{n+1}$ *(indication : on peut d'abord calculer $f_n(x)$).*

Réponse : $f_n(x) = x(x^{n-1} + \cdots + 1) - 1 = x\dfrac{x^n - 1}{x - 1} - 1 = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$. Comme $f_n(\alpha_n) = 0$ on en deduit $(\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$ et donc $\alpha_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(\alpha_n)^{n+1}$.

2.4. Montrer que $\alpha_{n+1} < \alpha_n < 1$ *(indication : comme f_n est croissante, toute inégalité $a < b$ est équivalente à $f_n(a) < f_n(b)$).*

Réponse : On veut vérifier l'inégalité $f_n(\alpha_{n+1}) < f_n(\alpha_n) < f_n(1)$ (qui est équivalente à $\alpha_{n+1} < \alpha_n < 1$).
Comme il est évident que $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ pour tout $x > 0$, on a $f_n(\alpha_{n+1}) < f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$.

On a aussi $f_n(\alpha_n) = 0 < f_n(1) = n - 1$.

2.5. Montrer que (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

Réponse : Elle est convergente parce que décroissante et minorée par 0.
D'après les réponses aux questions 2.3, 2.2, 2.4 et 1,

$$\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha_2)^{n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

2.6. *(facultatif)* Calculer $f_n(1)$ et en déduire la valeur de la dérivée de ${f_n}^{-1}$ au point $n - 1$.

Réponse : $f_n(1) = n - 1$ donc la dérivée de ${f_n}^{-1}$ au point $n - 1$ vaut $\dfrac{1}{f_n'\left({f_n}^{-1}(n-1)\right)} = \dfrac{1}{f_n'(1)}$. Après avoir calculé la somme arithmétique $f_n'(1)$ on en déduit que cette dérivée vaut $\dfrac{2}{n(n-1)}$.

Exercice 2

Étude et graphe des deux fonctions

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2 + \sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

Déterminer la position des courbes par rapport à la tangente au point $(1,0)$.

Réponse : Comme les dérivées de $f(x)$ et $g(x)$ sont $f'(x) = \dfrac{-x\left(4+\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2}$ et $g'(x) = \dfrac{-x\left(4-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$, leurs tableaux de variations sont

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1/3	↘	0

x	-1		0		1
g'(x)		+	0	-	
g(x)	0	↗	1	↘	0

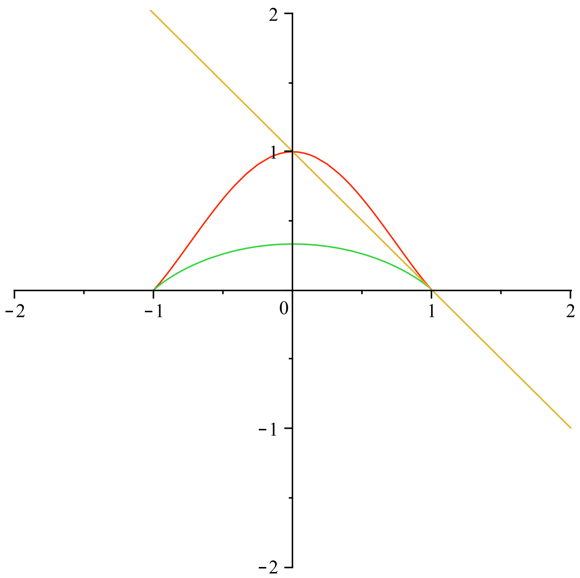
La tangente à la courbe de f au point $(1,0)$ a pour équation $y-0=(x-1)f'(1)$ ce qui fait $y=1-x$.
La tangente à la courbe de g au point $(1,0)$ est la même parce que $g'(1)=f'(1)$.
La courbe de f est au dessus de la tangente si et seulement si $\dfrac{f(x)}{1-x} \geq 1$ pour $x<1$ et x proche de 1. Comme

$$\frac{f(x)}{1-x} - 1 = \frac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{2+\sqrt{1-x^2}} \leq 0$$

on a $\dfrac{f(x)}{1-x} \leq 1$ et elle est au dessous de la tangente.
C'est moins évident pour g :

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{1-x} - 1 &= \frac{x-1+\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}\left(-\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}} \geq 0\end{aligned}$$

et la courbe de g est au dessus de la tangente.

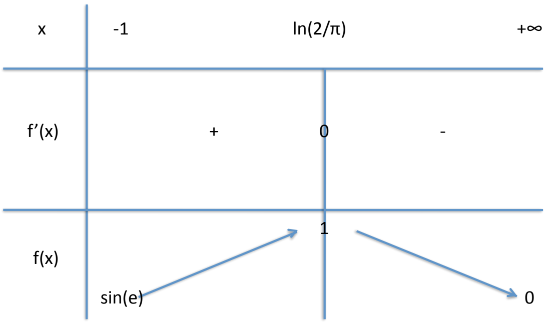


Exercice 3

Soit $f(x) = \sin\left(e^{-x}\right)$.

1. Étudier f sur $[-1, +\infty[$.

Réponse : $f'(x) = -e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)$ *s'annule si* e^{-x} *vaut* $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$*. En fait il vaut* $\dfrac{\pi}{2}$*, parce que* e^{-x} *ne peut pas dépasser* e *si* $x \in [-1, +\infty[$*. Cela fait donc* $e^{x} = \dfrac{2}{\pi}$ *et* $x = \ln\dfrac{2}{\pi}$*.*



2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1, 0[$ tel que f décroît strictement sur $[\alpha, +\infty[$.

Réponse : C'est $\ln\dfrac{2}{\pi}$.

3. Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Déterminer φ^{-1}.

Réponse : $\varphi^{-1}(x) = -\ln(\arcsin(x))$ *pour tout* $x \in]0, 1]$.

Exercice 4

1. On définit une fonction f en posant

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right).$$

Quel est son domaine de définition ? Calculer sa limite quand x tend vers 0. Que faut-il poser pour prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$*. Pour avoir sa limite quand* x *tend vers 0 il faut utiliser la méthode des conjugués :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \\ &= \frac{1}{x}\frac{1+x+x^2-1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \\ &= \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ *et il faut poser* $f(0) = \dfrac{1}{2}$ *pour prolonger* f *en une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*.*

2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$. Que faut-il poser pour prolonger g en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

On remarque que $g(x) = \dfrac{(2-x)(1-x^2)}{1-|x|} = \dfrac{(2-x)(1+x)(1-x)}{1-|x|}$.

Pour $x \le 0$ *on a* $g(x) = \dfrac{(2-x)(1+x)(1-x)}{1+x} = (2-x)(1-x)$ *donc* $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 6$.
$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$ *parce que* $|x| \to 0$ *quand* $x \to 0$ *(par valeurs positives ou par valeurs négatives).*
Pour $x \ge 0$ *on a* $g(x) = \dfrac{(2-x)(1+x)(1-x)}{1-x} = (2-x)(1+x)$ *donc* $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.
La fonction g *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *parce que c'est une composée de fonctions continues. On la prolonge en une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *en posant* $g(-1) = 6$ *et* $g(1) = 2$.

Exercice 5

1. Énoncer le théorème de Rolle.
Si f *est continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*, et si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

2. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On se propose de démontrer par deux méthodes différentes qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
<u>1ère méthode</u> :
On définit une fonction auxiliaire g en posant

$$g(t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{t}{1-t}\right) & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Démontrer qu'elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$; appliquer le théorème de Rolle puis conclure qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
Elle est continue sur $[0,1[$ *comme composée de fonction continues mais elle n'est pas définie en* $t = 1$*. On la prolonge en une fonction continue sur* $[0,1]$ *en posant* $g(1) = \lim\limits_{t\to 1} g(t)$ *; cette limite est égale à* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *qui vaut* 0 *d'après l'énoncé. Comme* $g(0)$ *vaut aussi* 0*, et comme* g *est dérivable sur* $]0,1[$ *en tant que composée de fonctions dérivables, on peut appliquer le théorème de Rolle et il existe* $c_1 \in]0,1[$ *tel que* $g'(c_1) = 0$.
On calcule $g'(t) = f'\left(\dfrac{t}{1-t}\right)\dfrac{1}{(1-t)^2}$*. En remplaçant* t *par* c_1 *on en déduit* $f'\left(\dfrac{c_1}{1-c_1}\right) = 0$*. Le réel positif* $c = \dfrac{c_1}{1-c_1}$ *répond à la question.*
<u>2ème méthode</u> :
- Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.
C'est vrai par le théorème des valeurs intermédiaires, parce que $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$.
- Montrer qu'il existe $\beta \in]1,+\infty[$ tel que $f(\beta) = \dfrac{1}{2}$.
C'est aussi vrai par le théorème des valeurs intermédiaires, parce que $f(1) = 1$ *et parce qu'il existe* $x > 1$ *tel que* $f(x) < \dfrac{1}{2}$ *(du fait que la limite de* f *en* $+\infty$ *vaut* 0*).*
- Montrer qu'il existe $c \in]\alpha,\beta[$ tel que $f'(c) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2 \cdot (-1)^n$.
1. Est-elle convergente ? (justifier)
Non, u_n *vaut* 2 *pour tout* n *pair et* -2 *pour tout* n *impair.*

2. Est-elle bornée ?
Oui, $-2 \le u_n \le 2$.

3. Est-elle croissante ?
Non, $u_{n+1} - u_n$ *n'est toujours positif, il vaut* -4 *si* n *est pair.*

4. Est-elle une suite géométrique ?
C'est une suite géométrique de raison -1.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.

On applique la formule des sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{2n} 2 \cdot (-1)^k = 2 \cdot \frac{1-(-1)^{2n+1}}{1-(-1)} = 2,$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} 2 \cdot (-1)^k = 2 \cdot \frac{1-(-1)^{2n+2}}{1-(-1)} = 0.$$

Fin du corrigé