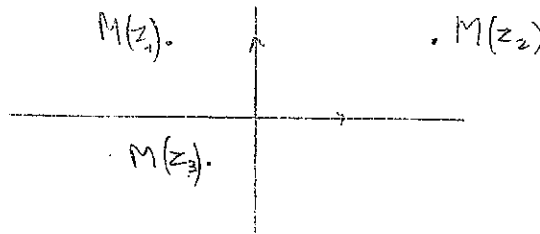


Corrigé de la planche 1

Exercice 1:



Exercice 2:

$$\begin{aligned}(1+i)(1-2i) &= 3-i \\ \frac{3-4i}{7+5i} &= \frac{1}{74} - \frac{43}{74}i \\ \frac{(3-2i)(5+i)}{5-i} &= \frac{46}{13} - \frac{9}{13}i\end{aligned}$$

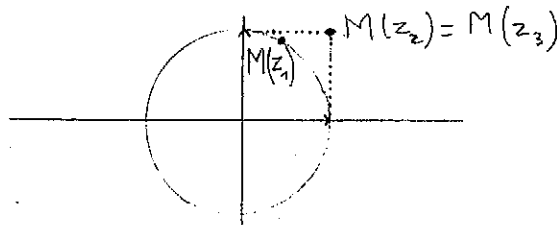
Exercice 3:

$$\begin{aligned}1-i\sqrt{3} &= 2e^{(-1/3 i\pi)} \\ -2 &= 2e^{(i\pi)} \\ \frac{4}{1+i\sqrt{3}} &= 2e^{(-1/3 i\pi)}\end{aligned}$$

Exercice 4:

$e^{i\theta}$ a pour module 1, tandis que $1-\frac{1}{2}i$ a pour module $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 $1+i$ et $1-i$ ont pour module $\sqrt{2}$; leur produit a pour module 2.
 z^2+z+2 vaut $i+1$ si $z=i$, tandis que $(z-1-i)(z+2-i)$ vaut -2 si $z=i$.

Exercice 5:



Exercice 6:

Si $\alpha = x+iy$, on a $\bar{\alpha} = x-iy$ et $\left| \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right| = \frac{|\alpha|}{|\bar{\alpha}|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(-y)^2}} = 1$ (parce que $y^2 = (-y)^2$)

Exercice 7:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = e^{(2/6 i\pi)}$$

Exercice 8: Suivant les valeurs de a et b , il existe ou il n'existe pas deux réels x, y tels que $(x+ai)(b+yi) = 4+3i$:

$$\begin{aligned}(x+ai)(b+yi) &= (xb-ya) + i(xy+ab) \\ \text{Si } a=0, \quad x &= 4/b \text{ et } y = 3/b \quad (b \neq 0) \\ \text{Si } b=0, \quad x &= -3a/4 \text{ et } y = -4/a \quad (a \neq 0) \\ \text{Si } ab \in]-1,0[\cup]0,4], \quad x &= \frac{1}{b} (2 \pm \sqrt{(1+ab)(4-ab)}) \quad \text{et } y = \frac{1}{a} (-2 \mp \sqrt{(1+ab)(4-ab)})\end{aligned}$$

Exercice 9:

$$|z-4| = |z+2i| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = x^2 + (y+2)^2$$

On développe et on simplifie: $y = -2x+3$ (c'est l'équation d'une droite)

Exercice 10:

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \theta + i \sin \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \left(2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{i n \frac{\theta}{2}}
 \end{aligned}$$

Exercice 11:

Si $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ est la forme polaire de α ,

$$\begin{aligned}
 z^n = \alpha \quad (\Rightarrow) \quad z &= |\alpha|^{\frac{1}{n}} e^{i \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi \right)} \\
 &= \alpha^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi \right) \right)
 \end{aligned}$$

Solutions de $z^3 = 1$:

$$\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3} \end{cases}$$

Solutions de $z^2 = 1$:

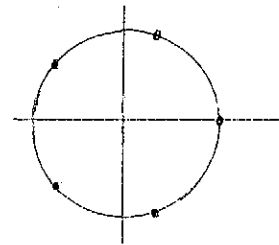
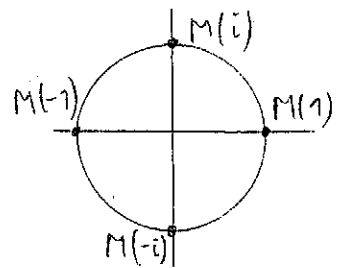
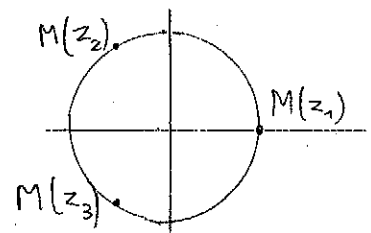
$$\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Solutions de $z^4 = 1$:

$$\begin{cases} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{cases}$$

Solutions de $z^5 = 1$:

$$\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \end{cases}$$



Exercice 12:

$$\text{Solutions de } z^2 - 5z + 9 = 0 \quad \begin{cases} \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11} \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11} \end{cases}$$

$$\text{Solutions de } z^2 + 10 = 0 \quad \begin{cases} i\sqrt{10} \\ -i\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Solutions de } z^2 + 6z + 34 = 0 \quad \begin{cases} -3 + 5i \\ -3 - 5i \end{cases}$$

$$\text{Solutions de } z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0 \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

Exercice 13:

a) $1 + j + j^2 = 0$

b) $j^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ j & \text{si } n = 3k+1 \\ j^2 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$

$$\sum_{p=0}^n j^p = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ -j & \text{si } n = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

(parce que $\sum_{p=0}^n j^p = \frac{j^{n+1} - 1}{j - 1}$)

Exercice 14:

$M(z)$ et $M(-i\bar{z})$ sont symétriques par rapport à la 2^{ème} bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM(1)}, \overrightarrow{OM(i)})$.

Exercice 15:

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + iy + \frac{4(x-iy)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$$

On obtient un cercle d'équation

$$\Leftrightarrow y - \frac{4y}{x^2+y^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{plus la droite d'équation } y=0$$

Exercice 16:

$$z' - (2+3i) = (z - (2+3i)) e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z' - z_0 = a(z - z_0) e^{i\alpha}$$

Exercice 17:

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 18:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} \quad (\text{parce que } 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$(1+i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \text{ multiple de } 4$$

Exercice 19:

Soit $e^z = \alpha$, alors pour $u = z + 2ik\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a $e^u = e^z e^{2ik\pi} = \alpha$. En particulier, pour $u = 2ik\pi$, $e^u = 1$.

Exercice 20:

Pour $z = x + iy$, on a $\alpha = |z|$ si $\begin{cases} x^2 = |z|^2 = x^2 + y^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$

Pour $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ on calcule $|z_1 + z_2|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

Ils sont égaux lorsque $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 = 0$ ou $\theta_1 = \theta_2$. (et $\rho=0$ équivaut à $z=0$)

Exercice 21: $(-1+3i)^{-1} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$; $(1+i)(1-i) = 2$; $(i+1)(i-2)(i+3) = -8-6i$;
 $(1+i)i(2-i) = -1+3i$; $(2i+1)\pi i = -2\pi + i\pi$; $(7+\pi i)(\pi+i) = 6\pi + i(\pi^2+7)$;
 $\frac{1}{3+i} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$; $\frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$; $\frac{2i}{3-i} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

Exercice 22: $a = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$
 donc $\frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}}$ ce qui fait $\frac{a}{b} = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.
 D'autre part d'après l'énoncé $\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}(1+i)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left((1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}) \right)$
 En identifiant les deux valeurs de $\frac{a}{b}$, on obtient $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

Exercice 23: $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1+i\sqrt{2} = \sqrt{3} e^{i \arctan(\sqrt{2})}$; $-3 = 3 e^{i\pi}$;
 $4i = 4 e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-5i = 5 e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $1-i\sqrt{2} = \sqrt{3} e^{-i \arctan(\sqrt{2})}$.

Exercice 24: $e^{i\pi} = -1$; $e^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{-3i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 $e^{5i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-\ln(2)i\pi} = \cos(\ln(2)\pi) - i \sin(\ln(2)\pi)$; $e^{2i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 25: $(a+ib)^2 = 5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=12 \end{cases}$
 mais aussi $(a+ib)^2 = 5+12i \Rightarrow \begin{cases} |a+ib|^2 = |5+12i| \\ a^2+b^2 = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$

On résout $\begin{cases} a^2-b^2=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$ et on se sert de $2ab=12$ seulement pour avoir le signe de $a = \text{signe de } b$.

D'où $a+ib = 3+2i$ ou $-3-2i$.

Exercice 26: Les racines carrées de $-7-24i$ sont $\pm(3-4i)$.
 Celles de $-3+4i$ sont $\pm(1+2i)$.

Les solutions de $z^2 + (3+4i)z - 1+5i = 0$ sont $-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}i \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13-a^2 + \sqrt{569-22a^2+a^4-80a}}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2-13 + \sqrt{569-22a^2+a^4-80a}}{2}}$.

Les racines quatrièmes de 1 sont 1, i, -1 et -i.

Les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont $1+2i, -1-2i, 2-i, -2+i$.

Exercice 27: D'après les indications de l'énoncé il s'agit de démontrer que $\cos \theta + i \sin \theta = \frac{1+i \tan(\frac{\theta}{2})}{1-i \tan(\frac{\theta}{2})}$. On a bien:

$$\frac{1+i \tan(\frac{\theta}{2})}{1-i \tan(\frac{\theta}{2})} = \frac{1+i \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}}{1-i \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2}) - i \sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$