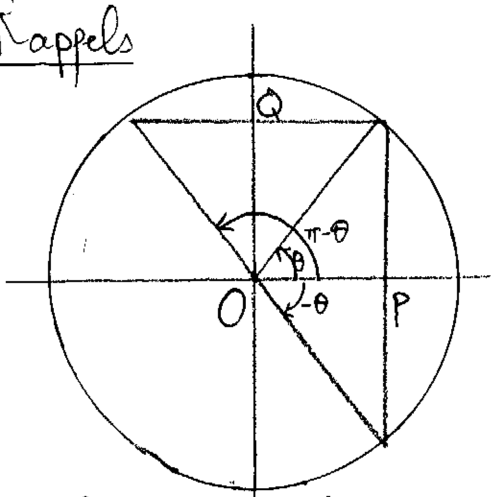
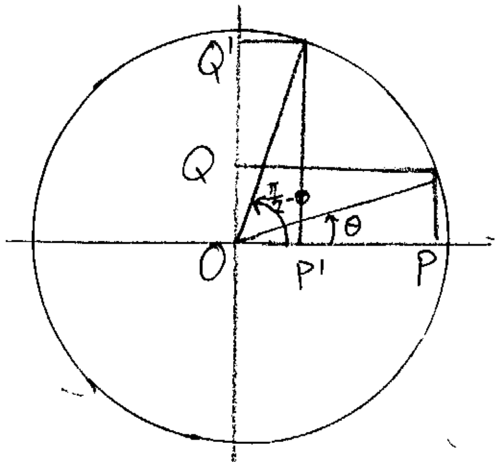
Corrigé de la planche 2.

Rappels





$\cos\theta = \cos(-\theta)$ et $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$
$(= \overline{OP})$ $(= \overline{OQ})$

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$\left(\overline{OP} = \overline{OQ'} \text{ et } \overline{OQ} = \overline{OP'}\right)$

Ex1.

$\sin(x-\pi) = -\sin x$ $\sin(x+4\pi) = \sin x$ $\sin(-x+5\pi) = \sin x$ $\sin(x-9\pi) = -\sin x$
$\cos(x-\pi) = -\cos x$ $\cos(x+4\pi) = \cos x$ $\cos(-x+5\pi) = -\cos x$ $\cos(x-9\pi) = -\cos x$
$\tan(x-\pi) = \tan x$ $\tan(x+4\pi) = \tan x$ $\tan(-x+5\pi) = -\tan x$ $\tan(x-9\pi) = \tan x$

$\sin(-x-12\pi) = -\sin x$ $\sin(x+7\pi) = -\sin x$ $\sin(-x-3\pi) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos x$
$\cos(-x-12\pi) = \cos x$ $\cos(x+7\pi) = -\cos x$ $\cos(-x+5\pi) = -\cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\sin x$
$\tan(-x-12\pi) = -\tan x$ $\tan(x+7\pi) = \tan x$ $\tan(-x+5\pi) = -\tan x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$

Ex2 $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}$

Ex3 On sait que la fonction sinus a pour période 2π, c'est à dire 2π est la plus petite constante positive telle que

$$\sin(x) = \sin(x+2\pi) \quad \text{pour tout } x.$$

La période de la fonction $\sin(\omega t+\varphi)$ est donc la plus petite constante positive T telle que

$$\sin(\omega(t+T)+\varphi) = \sin(\omega t+\varphi) \quad \text{pour tout } t$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sin(\omega t+\omega T+\varphi) = \sin(\omega t+\varphi) \\ \sin(\omega t+\varphi+\omega T) = \sin(\omega t+\varphi) \end{array}\right\} \text{pour tout } t$$

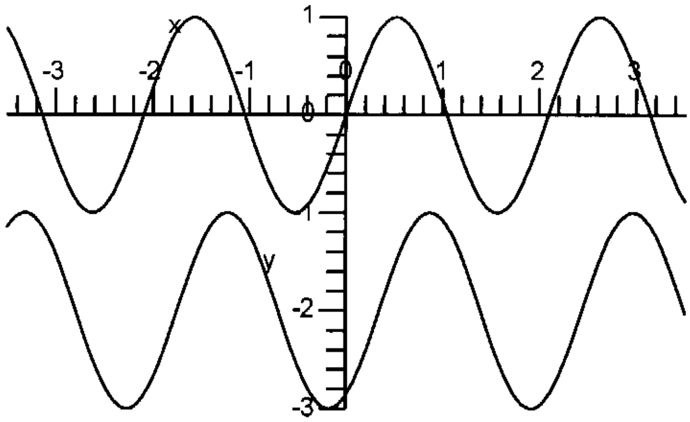
$$\sin(x+\omega T) = \sin(x) \quad \text{pour tout } x$$

C'est donc la constante T telle que $\omega T = 2\pi$, c'est à dire $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$.

Ex4 Tableau de variations de la fonction $y = \sin(3x)$
$(y' = 3\cos(3x))$
sur une période c'est à dire $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

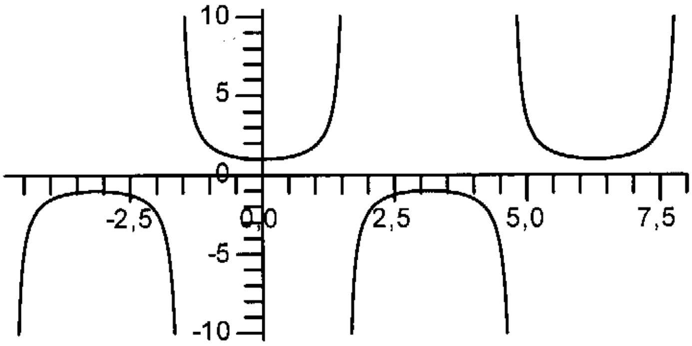
Courbe des fonctions $y = \sin(3x)$ et $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$



(la seconde se déduit de la première par la translation de vecteur $\left(\frac{\pi}{9} ; -2\right)$

<u>Ex5</u> $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ a pour dérivée $\sec'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sec'$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$\sec$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1



<u>Ex6</u> $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos(2x)$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x - 2\cos^2 x \sin^2 x$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$$

<u>Ex7</u> $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$\tan(x) = \tan(3x) \iff x = 3x + k\pi \iff x = -k\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 0 \iff \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$

$2x + \frac{\pi}{2} = -x + 2k\pi$ ou $\pi + x + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos(3x + \pi) = 0 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos(3x + \pi) = \cos(3x)$

$x - \frac{\pi}{3} = \pm 3x + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} - k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Ex8 On cherche r et φ tels que $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)$
$= r\cos x\cos\varphi + r\sin x\sin\varphi$

$\Leftrightarrow$ on cherche r et φ tels que $\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ tels que $a+ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

C'est donc $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = \mathrm{Arg}(a+ib)$.
(module de $a+ib$) (argument de $a+ib$)

Ex9 $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ (1)

$\Rightarrow \tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$ (2)

D'après la formule d'addition des tangentes $\left(\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\right)$

on en déduit $\frac{2x+x}{1-2x^2} = 1$

$2x + x = 1-2x^2$

$2x^2+3x-1=0$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ $x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$

La $2^{\text{ème}}$ solution ne convient évidemment pas ($\arctan(2x_2)+\arctan(x_2)$ est négatif) donc $\boxed{x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}}$ est la bonne réponse.
(remarquons que l'équation (1) a une seule solution alors que l'équation (2) en a deux)

Ex10 On calcule d'abord $1+e^{ix}+(e^{ix})^2+\dots+(e^{ix})^n = \frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1}$

(formule des sommes géométriques $1+a+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$)

Puis on prend la partie réelle de ces deux expressions, qu'on peut calculer compte tenu que $\begin{cases} (e^{ix})^n = e^{inx} & \text{(formule de Moivre)} \\ \text{et} \quad e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \end{cases}$

$e^{ix}-1 = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) = e^{i\frac{x}{2}}\, 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (d'après formule d'Euler)

De même pour $e^{i(n+1)x} - 1 = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\, 2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$.

On obtient donc $1+\cos(x)+\cos(2x)+\dots+\cos(nx) = \cos\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Ex 11

La forme polaire de $\dfrac{(5+i)^4}{239+i}$ est

$$\frac{\left(\sqrt{26}\; e^{i\arctan\frac{1}{5}}\right)^4}{\sqrt{239^2+1}\; e^{i\arctan\frac{1}{239}}} = \frac{26^2}{\sqrt{239^2+1}}\; e^{i\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right)}.$$

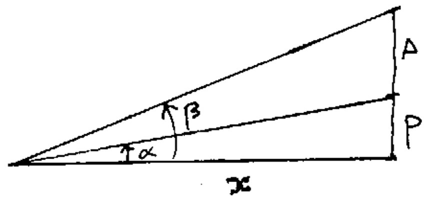
Mais
$$(5+i)^4 = 625 + 500i + 150i^2 + 20i^3 + i^4$$
$$= 476 + 480i = 4(119+120i)$$

$$\frac{1}{239+i} = \frac{239-i}{\sqrt{239^2+1}}$$

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = \frac{4}{\sqrt{239^2+1}}(119+120i)(239-i)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{239^2+1}}(28561 + 28561\, i)$$
$$= \frac{4\cdot 28561}{\sqrt{239^2+1}}\sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$$

donc en comparant les deux expressions trouvées
$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Ex 12

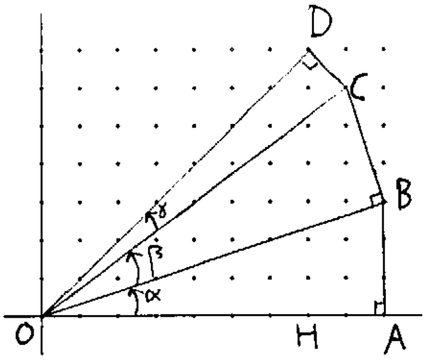


L'observateur voit la statue sous un angle $\beta - \alpha$.
La fonction tangente étant croissante, $\beta-\alpha$ est maximal quan
$\tan(\beta-\alpha)$ est maximal.
On calcule
$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{s+p}{x} - \frac{p}{x}}{1+\frac{(s+p)p}{x^2}}$$
$$= \frac{sx}{x^2+(s+p)p}$$

La dérivée de $\dfrac{sx}{x^2+(s+p)p}$ est $\dfrac{s(x^2+(s+p)p) - 2sx^2}{(x^2+(s+p)p)^2} = \dfrac{(s+p)p - x^2}{(x^2+(s+p)p)^2}$

elle s'annule quand $\tan(\beta-\alpha)$ est maximal ; et $(s+p)p - x^2 = 0 \iff \boxed{x = \sqrt{(s+p)p}}$
$(x>0)$

Ex 13



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = (-9)\cdot 0 + 0\cdot 3 = 0$ donc $\tan \alpha = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} = (-9)(-1)+(-3)\cdot 3 = 0$ $\quad \tan\beta = \dfrac{BC}{OB} = \dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC} = (-7)\cdot 1 + (-7)\cdot(-1) = 0$ $\quad \tan\gamma = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{1}{7}$

De plus le point $H(7,0)$ vérifie $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HD} = (-7)\cdot 0 + 0\cdot 7 = 0$ donc $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{HD}{OA} = 1$.
Compte tenu que α, β, γ et $\alpha+\beta+\gamma$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on déduit de ces quatre égalités que :

$$\alpha = \arctan\frac{1}{3}$$
$$\beta = \arctan\frac{1}{3}$$
$$\gamma = \arctan\frac{1}{7}$$
$$\alpha+\beta+\gamma = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

d'où $\boxed{2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$.

Ex 14

$\sin(3x) = 4\cos^2 x \sin x - \sin x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$

$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ $\qquad$ (formule H_3)

On fait l'hypothèse de récurrence (H_n)

$$\sin(nx) = (a_n \cos^n x + \dots + a_1 \cos x + a_0)\sin x$$
$$\cos(nx) = b_n \cos^n x + \dots + b_1 \cos x + b_0$$

Ces égalités sont (d'après H_3) vraies pour $n = 3$ (avec $a_3 = 0$, $a_2 = 4$, $a_1 = 0$, $a_0 =$ …
$b_3 = 4$, $b_2 = 0$, $b_1 = -3$, $b_0 =$ …

Démontrons que, si formules (H_n) sont vraies, alors les mêmes sont vraies en remplaçant n. On calcule

$\sin((n+1)x) = \sin(nx + x) = \sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x$ (formule d'addition)

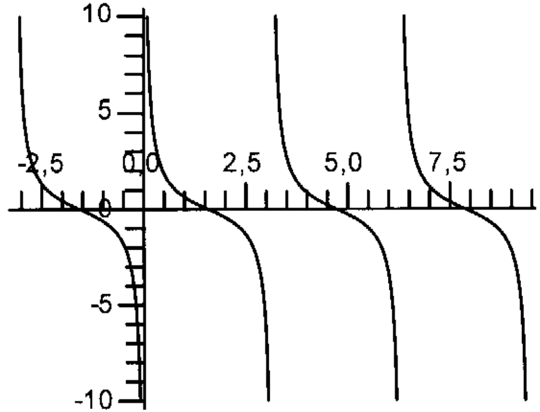
$= (a_n \cos^{n+1} x + \dots + a_0 \cos x)\sin x + (b_n \cos^n x + \dots + b_0)\sin x$

$= (a_n \cos^{n+1} x + (a_{n-1} + b_n)\cos^n x + \dots + (a_0 + b_1)\cos x + b_0)\sin x$

On a donc une relation de la même forme pour $\sin((n+1)x)$.
On fait de même pour $\cos((n+1)x)$; on dit alors que (H_{n+1}) est vrai, ce qui démontre les formules pour tout $n \geqslant 3$
(elles sont évidentes aussi pour $n = 0$ (avec $a_{ij} = 0$), pour $n = 1$ et $n = 2$)

Ex 15 $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \cot'(x) = -\dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)} < 0.$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cot'(x)$		$-$	$-1 \parallel -1$	$-$	
$\cot(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0 \parallel 0$	$\searrow$	$-\infty$



Ex 16 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha$

$= \sin\alpha.$

Ex 17 $\cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x + \sin^3 x = \cos^2 x(\cos x + \sin x) + \sin^2 x(\cos x + \sin x)$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos x + \sin x)$

$= \cos x + \sin x$

$= \sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin(x+\pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi)$ ...