Corrigé de la planche 3

Ex 1 $\vec{U}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{V}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sont orthogonaux parce que

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Il sont de norme 1 parce que

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Ex 2 Le cercle centré en $I(1;-1)$ de rayon $\sqrt{2}$ a pour équation

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Ex 3 L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\vec{MA} \perp \vec{MB}$ a pour équation

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$$

$$\iff (x-1)(x+1) + (y-2)(y-3) = 0 \qquad \text{(équation 1)}$$

Le cercle de diamètre AB a pour équation

$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \qquad \text{(équation 2)}$$

(parce que ce cercle est centré en $I\left(0,\frac{5}{2}\right)$, milieu de AB)

Après avoir développé l'équation 1 et l'équation 2 on s'aperçoit que c'est la même.

Ex 4 On sait que l'angle (non orienté) $\widehat{BAC}$ est égal à

$$\arccos \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{AB\ \ AC} = \arccos \frac{(-1)(-5)+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}\ \sqrt{(-5)^2+3^2+4^2}}$$

$$= \arccos \frac{15}{\sqrt{6}\,\sqrt{50}}$$

$$= \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Ex 5 Supposons connu que la droite (D) d'équations paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+\frac{t\sqrt{6}}{6} \\ y = \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ z = \frac{2t\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

a pour vecteur directeur $\vec{V}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}\right)$

(c'est à dire, les coefficients de t dans les équations paramétrique).

Pour faire de même avec la droite (Δ) d'équations $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y = 2 \end{cases}$

on met ces équations sous forme paramétrique en posant (par exemple)

$x = t$, d'où $y = x-2 = t-2$, et $z = 1-x-y = 1-t-(t-2) = 3-2t$.

La droite (Δ) a donc pour équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = t-2 \\ z = 3-2t \end{cases}$

Son vecteur directeur a pour coordonnées les coefficients de t dans ces équations, c'est donc $\overrightarrow{W}\,(1,1,-2)$.

On calcule d'abord l'angle $(\widehat{\vec{V},\vec{W}})$: (non orienté)

$$(\widehat{\vec{V},\vec{W}}) = \arccos \frac{\vec{V}\cdot\vec{W}}{\|\vec{V}\|\,\|\vec{W}\|}$$

$$= \arccos \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}\,(1,1,2)\cdot(1,1,-2)}{\frac{\sqrt{6}}{6}\,\|(1,1,2)\|\ \ \|(1,1,-2)\|}$$

$$= \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Cependant $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ est un angle obtus (c'est à dire supérieur à $\frac{\pi}{2}$).

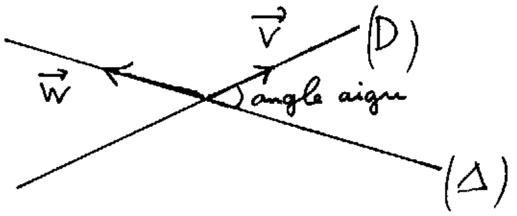
L'angle aigu entre les deux droite est donc

$$\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Son cosinus vaut

$$\cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3} \qquad \left(\text{parce que } \cos(\arccos(\theta)) = \theta\right)$$



Ex 6 $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

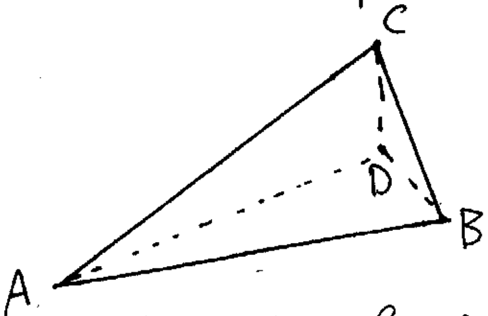
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \cancel{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}} - \cancel{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}} + \cancel{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}} - \cancel{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}} + \cancel{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}} - \cancel{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}$$

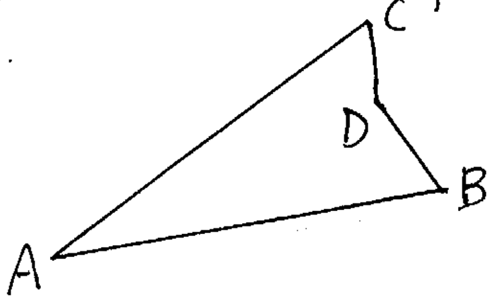
$$= 0$$

On en déduit que si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ sont nuls, alors $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ est nul (si $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$, alors $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$).

Représentation dans l'espace :



Représentation dans le plan :



Ex 7 On rappelle que le produit vectoriel de (x,y,z) par (x',y',z') est

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right) = \left(yz'-y'z,\ zx'-z'x,\ xy'-x'y \right)$$

Pour les vecteurs $\vec{U}(1,-1,0)$ et $\vec{V}(0,1,-1)$ et $\vec{W}(-1,0,-1)$ on a donc

$$\vec{V}\wedge\vec{W}\ (-1,1,1) \quad \text{et} \quad \vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})\ (-1,-1,0)$$
$$\vec{U}\wedge\vec{V}\ (1,1,1) \quad \text{et} \quad (\vec{U}\wedge\vec{V})\wedge\vec{W}\ (-1,0,1).$$

Donc $\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W}) \neq (\vec{U}\wedge\vec{V})\wedge\vec{W}$, le produit vectoriel n'est pas associatif.

Ex 8 On rappelle que $\vec{V}\wedge\vec{U} = -\vec{U}\wedge\vec{V}$ et $\vec{U}\wedge\vec{U} = \vec{0}$ pour tout $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

On calcule $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$

$$= -\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AC}\wedge(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$$
$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})\wedge\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD})$$

Ex 11 (a) $\vec{V}(1,1,1)$ est orthogonal au plan (P) d'équation $x+y+z=0$

(parce que les points $M(x,y,z)$ de ce plan vérifient $(1,1,1)\cdot(x,y,z) = x+y+z=0$)

(b) Soit $M(x,y,z)$ un point de la droite passant par $A(1,1,1)$ et orthogonale à (P). $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$ de la question A, donc

$$\overrightarrow{AM} = t(1,1,1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y-1, z-1) = t(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

(c) $\overrightarrow{OA}$ est évidemment orthogonal au plan (P) $\quad(\overrightarrow{OA} = \vec{V})$

Donc la distance du point A au plan (P) (qui passe par le point O) est

$$OA = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

Ex12 Compte tenu que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

on a $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

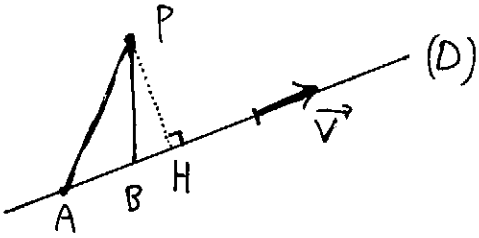
d'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Ex13 $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha\right)^2 - \left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin\alpha|\right)^2$
$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\left(\cos^2\alpha - |\sin\alpha|^2\right)$

Mais $|\sin\alpha|^2 = (\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, et $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$.

Donc $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos(2\alpha)$.

Ex 14



1. Quelque soient les points A et B de la droite (D) on a
$\vec{PA}\wedge\vec{V} = (\vec{PB}+\vec{BA})\wedge\vec{V}$
$= \vec{PB}\wedge\vec{V} + \vec{BA}\wedge\vec{V}$
$= \vec{PB}\wedge\vec{V}$ (parce que $\vec{BA}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires).

2. En particulier si H est la projection orthogonale de P sur (D), on a
$\vec{PA}\wedge\vec{V} = \vec{PH}\wedge\vec{V}$

donc $\|\vec{PA}\wedge\vec{V}\| = \|\vec{PH}\wedge\vec{V}\| = \|\vec{PH}\|\,\|\vec{V}\|\,\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|$
$= d\,\|\vec{V}\|$

où d est la longueur du segment PH, c'est à dire la distance de P à (D).

On en déduit $d = \dfrac{\|\vec{PA}\wedge\vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$.