Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

LUNDI 13 OCTOBRE 2008

TRANSFORMATIONS DU PLAN COMPLEXE

Exercice 1. *Triangle équilatéral.*

Soient A, B, C trois points du plan, il s'agit de démontrer le théorème d'après lequel

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \leftrightarrow AB = AC = BC$$

(c'est à dire de démontrer que ces deux caractérisations des triangles équilatéraux sont équivalentes).

Supposons $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. Comme la somme de ces trois angles vaut π (=somme des angles de tout triangle), chacun des trois vaut $\frac{\pi}{3}$. Ces trois angles représentent les arguments respectifs de $\frac{c-a}{b-a}, \frac{a-b}{c-b}, \frac{b-c}{a-c}$, on a donc

$$\frac{c-a}{b-a} = \rho_1 e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad \frac{a-b}{c-b} = \rho_2 e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad \frac{b-c}{a-c} = \rho_3 e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

On en déduit (en faisant le produit et en simplifiant $-1 = \rho_1\rho_2\rho_3 e^{i\pi} = -\rho_1\rho_2\rho_3$ c'est à dire $\rho_3 = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$. On en déduit aussi

$$c - a = \rho_1 e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a), \quad a - b = \rho_2 e^{\frac{i\pi}{3}}(c-b), \quad b - c = \rho_3 e^{\frac{i\pi}{3}}(a-c) \tag{1}$$

d'où, en faisant la somme et en divisant par $e^{\frac{i\pi}{3}}$,

$$0 = \rho_1(b-a) + \rho_2(c-b) + \rho_3(a-c) = \rho_1(b-a) + \rho_2(c-b) + \frac{1}{\rho_1\rho_2}(a-c).$$

qui équivaut à

$$(\rho_1(\rho_2)^2 - 1) \cdot \frac{a-b}{c-b} = (\rho_1)^2\rho_2 - 1.$$

La partie imaginaire du premier membre est $(\rho_1(\rho_2)^2 - 1)\rho_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, celle du second membre est nulle, donc $\rho_1(\rho_2)^2 - 1$ est nul. Mais alors le second membre aussi est nul. De ces deux égalités on déduit $\rho_1(\rho_2)^2 = (\rho_1)^2\rho_2$ d'où, en divisant par $\rho_1\rho_2$, on en déduit $\rho_1 = \rho_2$. Un calcul analogue donnerait $\rho_2 = \rho_3$ ou $\rho_3 = \rho_1$ donc, compte tenu que le produit de ces trois nombres réels est 1, ils sont tous les trois égaux à 1. Alors d'après (**??**) les longueurs des segments $[AB], [BC], [CA]$ sont égales.

Réciproquement, supposons que ces longueurs sont égales. Alors $\frac{c-a}{b-a}$ est de module 1 donc il est de la forme $1 \cdot e^{i\alpha}$. Quant à $\frac{c-b}{b-a}$, il a aussi pour module 1 et il est égal à $\frac{(c-a)-(b-a)}{b-a} = \frac{c-a}{b-a} - 1 = e^{i\alpha} - 1$.

On a donc l'équation $\left|e^{i\alpha} - 1\right|$; on résoud et on obtient $\alpha = \pm\frac{\pi}{3}$ c'est à dire l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est $\pm\frac{\pi}{3}$. On fait de même pour les trois autres angles, ils sont donc égaux.

Exercice 2. *Rotation.*

a) Soient les points $A(2,4), B(6,2), C(4,-2)$ et $D(2,-6)$. Une rotation R transforme le segment $[AB]$ en le segment $[CD]$. Placer le centre de cette rotation (sur le dessin).

C'est le point O.

b) Pour tout point M d'affixe z, que vaut l'affixe z' de l'image de M par R?

$z- = -iz$.

c) Soit T une autre transformation du plan qui transforme $[AB]$ en $[CD]$. On suppose aussi qu'elle conserve les longueurs, c'est à dire elle transforme tout segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ de même longueur. On suppose que le point $M(6,4)$ a un transformé $M' = T(M)$ différent de $R(M)$, placer M' sur le dessin.

$M'(1,-4)$.

d) Trouver une transformation du plan qui transforme le triangle ABM en CDM'.

Faire une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ puis symétriser par rapport à la droite qui passe par C et D.