Université de Provence 2008–2009

Corrigé du partiel d'atelier

Mercredi 15 octobre 2008

1^{er} partiel

Exercice 1. *Logique.*

La fonction f est définie par $f(x) = x^2$. Écrire la négation de chacune des propositions suivantes:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$

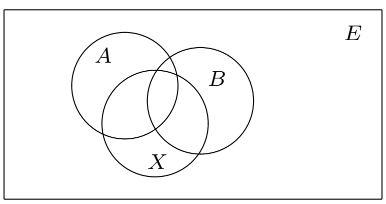
et démontrer que ces deux négations sont vraies.

La négation de la $1^{\text{ère}}$ est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et elle est vraie: il existe un x tel que $x^2 = 0$, c'est $x = 0$.

La négation de la $2^{\text{ème}}$ est $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ et elle est vraie: on a $x^2 \geq 0$ par la règle des signes, valable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Ensembles.*

A, B, X sont trois parties d'un ensemble E. Que doit vérifier X pour que $A \cap X = B \cap X$?



Si X est inclus dans $A \cap B$, chacun des deux ensembles $A \cap X$ et $B \cap X$ est égal à X. Si X est inclus dans le complémentaire de $A \cup B$, chacun des deux ensembles $A \cap X$ et $B \cap X$ est vide. La condition pour que $A \cap X = B \cap X$ est

$$X \subset (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$$

(X est inclus dans la réunion de $A \cap B$ et du complémentaire de $A \cup B$). Si tel n'était pas le cas, X aurait des éléments dans $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$ et alors $A \cap X$ et $B \cap X$ seraient différents.

Exercice 3. *Calculs sur les nombres complexes.*

a) Vérifier que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |x + iy| \leq |x| + |y|.$$

Il s'agit d'établir des inégalités entre trois nombres positifs. Trois nombres positifs a, b, c vérifient l'inégalité $a \leq b \leq c$ si et seulement si $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Il s'agit donc de démontrer les inégalités

$$\left(\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq (|x + iy|)^2 \leq (|x| + |y|)^2 .$$

On cherche donc à démontrer que $(|x + iy|)^2 - \left(\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}\right)^2$ et $(|x| + |y|)^2 - (|x + iy|)^2$ sont positifs (pour le faire il faut les calculer). Le premier étant égal à $\left(\frac{|x| - |y|}{\sqrt{2}}\right)^2$ et le second à $2|x||y|$, ils sont positifs.

b) Mettre $\sqrt{3} + i$ sous forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ et déterminer tous les entiers n tels que $(\sqrt{3} + i)^n \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et par conséquent $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = 2^n \cos\dfrac{n\pi}{6} + 2^n i \sin\dfrac{n\pi}{6}$ appartient à $\mathbb{R}$ si et seulement si $\sin\frac{n\pi}{6} = 0$, $\dfrac{n\pi}{6} = k\pi,\ n = 6k$ c'est à dire n est multiple de 6.

Exercice 4. *Injections et surjections.*

a) Rappeler la définition de e^z, pour $z = x + iy$ avec x et y réels:

$$e^z = \ \ldots\ldots\ .$$

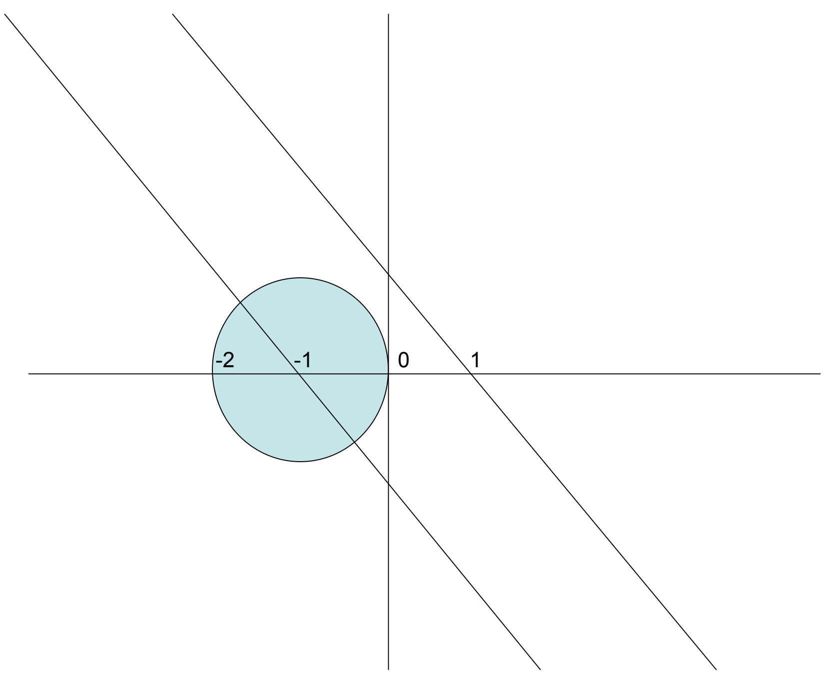
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

b) L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = e^z$ est-elle injective? surjective? *(Indication: étant donné un nombre complexe non nul, chercher tous ses antécédents par f)*

Les antécédents d'un nombre complexe non nul $\rho e^{i\theta}$ sont tous les $z = x + iy$ tels que $e^z = \rho e^{i\theta}$. On cherche tous les x et les y réels qui vérifient cette égalité. D'après la question précédente le module de e^z est e^x, on a donc $e^x = \rho$ ce qui fait $x = \ln\rho$. Quant à y il est égal à l'argument de e^z (modulo 2π) et, comme on est parti de l'équation $e^z = \rho e^{i\theta}$, il est égal à θ modulo 2π. On a donc plusieurs antécédents (par exemple $e^0 = e^{2i\pi} = 1$, le nombre 1 a pour antécédents 0 et $2i\pi$ entre autres). On conclut que f est surjective et non injective.

Exercice 5. *Sous-ensembles du plan.*

Représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $|x + y| \leq 1$, ainsi que l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|1 + z| \leq 1$. Trouver une surjection du premier ensemble vers le second.



Pour trouver la surjection, c'est à dire l'application surjective qui associe à tout point $M(x, y)$ du premier ensemble un point $M(z')$ du second, on choisit un z' tel que $|x + y| = |1 + z'|$ (les deux étants inférieurs à 1 d'après l'énoncé). Compte tenu que $1 + z'$ est un nombre complexe alors que $x + y$ ne l'est pas, il suffit de poser $1 + z' = (x + y)e^{i(x-y)}$ (par exemple) c'est à dire $\boxed{z' = -1 + (x + y)e^{i(x-y)}}$.