Université de Provence 2008–2009

Ateliers de Mathématiques

Lundi 1er décembre 2008

Fonctions inverses; développements limités

Exercice 1. *Équation*

Lesquelles des équations suivantes ont-t-elle une solution?

$\arcsin x = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)$,

$\arcsin x = 2 \arccos \left(\frac{1}{2}\right)$,

$\arccos x = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)$,

$\arccos x = 2 \arccos \left(\frac{1}{2}\right)$.

$\arcsin x = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arcsin x = 2 \arccos \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{2\pi}{3}$, pas de solution;

$\arccos x = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;

$\arccos x = 2 \arccos \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \arccos x = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

La deuxième équation n'a pas de solution parce que $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'après la définition de l'arcsinus.

Exercice 2. *Relation vérifiée par l'arccosinus*

a) Démontrer pour tout $x \in [0,1]$ la relation $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos(x)$.

(Méthode: Poser $\arccos(x) = \theta$ *et tout exprimer en fonction de* θ*)*

En posant $\arccos(x) = \theta$ on a $x = \cos\theta$ et $2x^2 - 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$. Compte tenu que x appartient à $[0,1]$, son arccosinus c'est à dire θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et 2θ à $[0,\pi]$. Or les fonctions

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

sont réciproques l'une de l'autre, donc

$$\arccos(2x^2 - 1) = \arccos(\cos(2\theta)) = 2\theta = 2\arccos(x).$$

b) Cette relation reste-t-elle vraie pour $x \in [-1,0]$?

L'expression de $\arccos(\cos(2\theta))$ est compliquée si 2θ n'appartient pas à $[0,\pi]$. Utilisons plutôt la méthode suivante:

Pour $x \in [-1,0]$ on a $x = -t$ avec $t \in [0,1]$. On a $x^2 = t^2$ donc

$$\arccos(2x^2 - 1) = \arccos(2t^2 - 1) = 2\arccos(t) \quad \text{(d'après le résultat de la question a).}$$

La bonne formule est donc $\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos(-x)$, ou $\arccos(2x^2 - 1) = 2\pi - 2\arccos(x)$.

Exercice 3. *Développements limités*

a) Développer $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 et $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2, en $x=0$.

$(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ et $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

b) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$, par la règle de l'Hospital ou par les développements limités.

On réduit au même dénominateur:

$$\frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \arctan x - (\sin x)^3}{x^2(\sin x)^3}$$

puis on développe le numérateur et le dénominateur:

$$= \frac{x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)\right)^3}{x^2(x + x\varepsilon_3(x))^3}.$$

Au numérateur les termes en x^3 s'éliminent et il reste $-\dfrac{x^5}{3} + \dfrac{3x^5}{6} + x^5\varepsilon_4(x) = \dfrac{x^5}{6} + x^5\varepsilon_4(x)$. Le dénominateur c'est $x^5 + x^5\varepsilon_5(x)$, donc la fraction est égale à

$$\frac{\frac{x^5}{6} + x^5\varepsilon_4(x)}{x^5 + x^5\varepsilon_5(x)} = \frac{x^5\left(\frac{1}{6} + \varepsilon_4(x)\right)}{x^5\left(1 + \varepsilon_5(x)\right)} = \frac{\frac{1}{6} + \varepsilon_4(x)}{1 + \varepsilon_5(x)}$$

et, compte tenu que les $\varepsilon(x)$ tendent vers 0, sa limite est $\dfrac{1}{6}$.