Université de Provence 2008–2009

Ateliers de Mathématiques

Mercredi 8 octobre 2008

Représentation des nombres complexes dans le plan

Exercice 1. *Équation.*

a) Étant donné un réel α, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$

b) Représenter dans le plan les deux solutions, et préciser sur cette représentation quel est l'angle α.

c) À quelle condition sur α cette équation a-t-elle deux solutions réelles? Une seule solution réelle? Deux solutions non réelles?

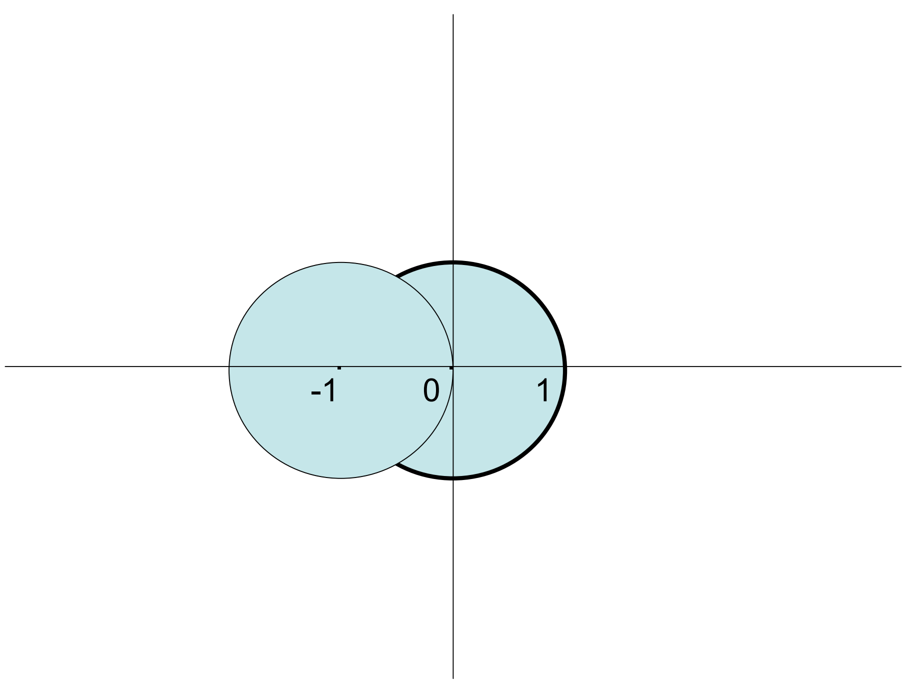
$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha$ (parce que $\cos^2 = 1 - \sin^2$).

Δ est le carré de $\pm 2i\sin\alpha$ donc les solutions sont $z = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ c'est à dire $\boxed{e^{\pm i\alpha}}$. Elles sont réelles si et seulement si $\sin\alpha$ est nul c'est à dire α est multiple de π; mais dans ce cas les deux sulotions sont égales c'est à dire on ne peut jamais avoir deux solutions réelles distinctes.

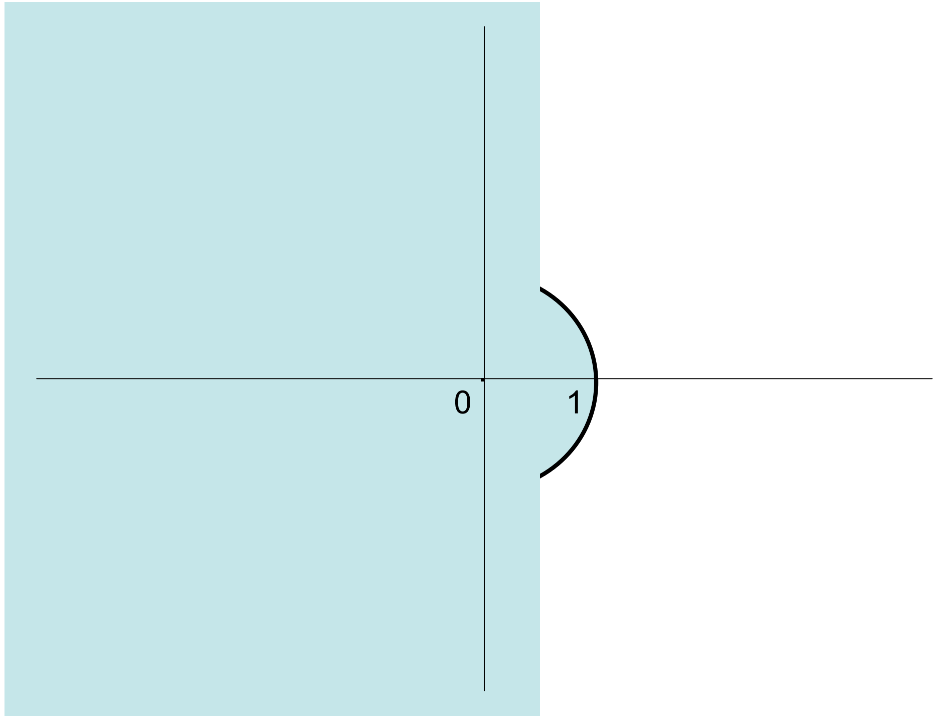
Exercice 2. *Inéquation.*

Représenter dans le plan l'ensemble des points d'affixe $z = e^{i\theta}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|1 + z^2| \geq 1$ *(indication: compte tenu que $z^2 = e^{2i\theta}$, calculer $|1 + z^2|$ en utilisant les formules trigonométriques).*

L'ensemble des points d'affixe z^2 est sur le cercle trigonométrique, mais la distance de ces points au point d'affixe -1 est supérieure à 1 donc leur argument est entre $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (en gras ci dessous):



La réponse, c'est à dire l'ensemble des points d'affixe z, est obtenue en divisant par 2 l'argument des z^2 c'est à dire leur argument est entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$:



Exercice 3. *Triangle.*

Pour quelles valeurs de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ les points d'affixe 1, z et iz forment-ils un triangle équilatéral? *(rappel: un triangle ABC est équilatéral si et seulement si $AB = BC = CA$)*

L'équation $|z-1| = |iz-1|$ donne $(x-1)^2+y^2 = (-y-1)^2+x^2$. L'équation $|iz-1| = |z-iz|$ donne $(-y-1)^2+x^2 = 2x^2+2y^2$. On en déduit $y = -x$ et $2x^2 + 2x - 1 = 0$ d'où $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1 - i)$.