Exercice 1. (Question de cours)

L'endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est dit inversible s'il admet un endomorphisme réciproque ($g : E \rightarrow E$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$).

Calcul de l'endomorphisme réciproque de $s(x, y, z) = (x, 4x + 3y - 4z, 4x + 2y - 3z)$:

on pose $(x', y', z') = (x, 4x + 3y - 4z, 4x + 2y - 3z)$;

on calcule x, y, z en fonction de x', y', z' ;

on obtient $(x, y, z) = (x', 4x' + 3y' - 4z', 4x' + 2y' - 3z')$ et on remarque que c'est $s(x', y', z')$;

donc dans ce cas l'endomorphisme réciproque s^{-1} est égal à s , et s est une symétrie.

Le noyau de $s + Id$ est le sous-espace engendré par $(0, 1, 1)$.

Le noyau de $s - Id$ est le sous-espace engendré par $(1, -2, 0)$ et $(1, 0, 1)$.

Exercice 2. Matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, pour polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc la seule valeur propre est 2. Elle n'est pas diagonalisable: si elle l'était, la matrice

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifierait $A = PA'P^{-1}$ (où P est la matrice de passage). Mais A' c'est 2 fois l'identité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A = P(2I)P^{-1} = 2PP^{-1} = 2I$, ça contredit l'énoncé.

Pour montrer par récurrence que $A^p = \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{N}$, il faut effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer par récurrence que $A^{-p} = \begin{pmatrix} 2^{-p} & -p2^{-p-1} \\ 0 & 2^{-p} \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{N}$, il faut effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 2^{-p} & -p2^{-p-1} \\ 0 & 2^{-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Résolution de $AB = BA$, c'est à dire $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$\begin{cases} 2a + c = 2a \\ 2b + d = a + 2b \\ 2c = 2c \\ 2d = c + 2d \end{cases}$$

D'où $c = 0$ et $d = a$ c'est à dire

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Pourquoi l'égalité $B^2 = A$ implique-t-elle $AB = BA$?

Parce que $AB = B^2B = B^3 = BB^2 = BA$.

D'après la question précédente, on a alors $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. En résolvant $B^2 = A$ on obtient

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/(2\sqrt{2}) \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

N'est pas inversible: si elle l'était elle serait carrée.

Elle est de rang 2: la première colonne est la somme des deux autres, qui sont indépendantes, qui forment donc une base de $\text{Im}(A)$.

Équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le deuxième membre de cette équation est l'opposé de la troisième colonne de A . Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{un élément de Ker}f.$$

Équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pas de solution, le second membre n'étant pas combinaison linéaire

des colonnes de A , tandis que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l'est.

D'autre part $\text{Ker}(A)$ est le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matrices de passage: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique

et $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{X_1, X_2, X_3\}$.

$\text{Ker}(f)$ est le sous-espace engendré par $(0, 1, 1)$.

f est donc de rang 2. Pour la base de $\text{Im}(f)$, choisir deux colonnes de sa matrice dans la base canonique.

Exercice 5. Famille $X_0, f(X_0), \dots, f^{(n-1)}(X_0)$.

Si elle est libre, alors elle forme une base de $\mathbb{R}^n$ (parce qu'il y a n vecteurs dans cette famille libre).

Maintenant on pose $f(x, y, z) = (y, -x, 0)$.

$X_0, f(X_0), f^{(2)}(X_0)$ forme une base, ce sont les vecteurs $X_0 = (1, 2, 1)$ (d'après l'énoncé) et

$f(X_0) = (2, -1, 0)$, $f^{(2)}(X_0) = (-1, -2, 0)$. Remarquons que $f^{(3)}(X_0) = (-2, 1, 0)$ est égal à $-f(X_0)$.

La matrice de f dans la base $\{X_0, f(X_0), f^{(2)}(X_0)\}$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f , ou de A , est $-X(X^2 + 1)$.

Généralisation.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique $(-1)^n(X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0)$.