| | |
|---|---|
| Université de Provence | 2008–2009 |

**Corrigé de l'atelier**

Lundi 22 septembre 2008

Logique et théorie des ensembles

**Exercice 1.** *Comment nier une assertion.*

1. Soit l'assertion (1): "tous les nombres entiers sont des carrés d'entiers".

_ Est-elle vraie ou fausse?

Fausse, 2 n'est pas un carré d'entier.

_ Écrivez la négation de la proposition (1) (on l'appellera proposition (2)).

"les nombres entiers ne sont pas tous des carrés d'entiers"

"il existe au moins un nombre entier qui n'est pas un carré d'entier".

_ Traduisez (1) et (2) à l'aide des symboles mathématiques.

$\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = k^2$

$\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ n \neq k^2$.

2. Soit la proposition (3): "si un nombre entier naturel est multiple de 12, alors il est aussi multiple de 2 et de 6".

_ Vous paraît-elle vraie? justifiez.

Elle est vraie: si $n = 12k$ alors $n = 2k'$ (avec $k' = 6k$) et $n = 6k''$ (avec $k'' = 2k$).

_ Traduisez la à l'aide de symboles mathématiques.

$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 12k \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N},\ n = 2k'$ et $\exists k'' \in \mathbb{N},\ n = 6k'')$.

_ Que pensez-vous de sa réciproque (4)? justifiez.

Sa réciproque, c'est à dire la proposition "si un nombre entier naturel est multiple de 2 et de 6, alors il est multiple de 12", est fausse parce que par exemple 6 est multiple de 2 et de 6 mais pas de 12.

_ Traduisez la négation (5) de la proposition (4) à l'aide des symboles mathématiques.

$\exists (n, k', k'') \in \mathbb{N}^3,\ \forall k \in \mathbb{N},\ n = 2k' = 6k'' \neq 12k$

(c'est ce qu'on vient de démontrer à la question précédente: on a trouvé un entier naturel $n$ qui est multiple de 2 et de 6 mais pas de 12).

_ Trouvez deux nombres entiers naturels $u$ et $v$ strictement inférieurs à 12, de sorte que l'équivalence suivante soit vraie: "un nombre entier naturel est multiple de 12 si et seulement si il est multiple de u et de v".

$u = 3$ et $v = 4$.

**Exercice 2.** *Différence symétrique des ensembles.*

Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. On rappelle que $A\Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ ou à $B$ sans appartenir aux deux à la fois.

Laquelle des deux égalités suivantes est-elle vraie:

$$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C) \quad \text{ou} \quad (A\cap B)\Delta C=(A\Delta C)\cap(B\Delta C)?$$

La première est vraie: tout élément $x\in(A\Delta B)\cap C$ appartient à $A$ ou $B$, et aussi à $C$; il appartient donc à $A\cap C$ ou à $B\cap C$; il ne peut appartenir aux deux car alors il appartiendrait à $A\cap B$, ce qui lui est interdit par $x\in A\Delta B$. Finalement il appartient à $(A\cap C)\Delta(B\cap C)$.

Réciproquement soit $x'\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$. Il appartient à $A\cap C$ ou $B\cap C$, donc forcément à $C$, et aussi à $A$ ou $B$. Il ne peut appartenir aux trois puisqu'il ne peut appartenir à la fois à $A\cap C$ et $B\cap C$. Il est donc dans $A\Delta B$, et dans $(A\Delta B)\cap C$.

La deuxième proposition est fausse: les éléments qui appartiennent à $A$ et $C$ sans appartenir à $B$, n'appartiennent pas à $A\cap B$ et appartiennent à $(A\cap B)\Delta C$. Mais par contre ils n'appartiennent pas à $A\Delta C$ et encore moins à $(A\Delta C)\cap(B\Delta C)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A\Delta B$ | $(A\Delta B)\cap C$ | $A\cap C$ | $B\cap C$ | $(A\cap C)\Delta(B\cap C)$ |
| $A\cap B$ | $(A\cap B)\Delta C$ | $A\Delta C$ | $B\Delta C$ | $(A\Delta C)\cap(B\Delta C)$ |