Université de Provence	2008–2009

Corrigé de l'atelier

Mercredi 24 septembre 2008

Fonctions

On rappelle qu'une application $f : E \to F$ est bijective si tout élément de F a un unique antécédent par f. Elle est injective si tout élément de F a au plus un antécédent, et surjective s'il a au moins un antécédent. Les applications strictement croissantes définies sur un intervalle $[a; b]$ sont des bijections de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$.

Exercice 1. *Fonctions usuelles.*

Remplir les cases vides (utiliser les mots "injection, surjection, bijection" ou les intervalles $[-1; 1]$, $[0; \pi]$, $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $]0; +\infty[$, $[0; +\infty[$, $\mathbb{R}$).

a) La fonction $f(x) = x^2$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ (parce que les $y \in \mathbb{R}^+$ ont un ou deux antécédents qui sont $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$).

C'est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

b) La fonction cosinus est une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$.

La fonction sinus est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction exponentielle est une injection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (les réels strictement positifs ont un seul antécédent et les autres n'ont pas d'antécédent).

C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

d) La fonction logarithme est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Composition des fonctions.*

Soient $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles égales?

Non parce que $f \circ g(x) = f(x^2 - 1) = 3x^2 - 2$ et $g \circ f(x) = g(3x + 1) = 9x^2 + 6x$.

Soient $h(x) = ax + b$ et $k(x) = cx + d$; on suppose que les fonctions $h \circ k$ et $k \circ h$ sont égales, que valent a, b, c, d?

Comme $h \circ k(x) = h(cx + d) = acx + ad + b$ et $k \circ h(x) = k(ax + b) = acx + bc + d$, ces deux fonctions sont égales si et seulement si $ad + b = bc + d$. Cette égalité équivaut à $ad - d = bc - b$ c'est à dire à $\boxed{(a-1)d = b(c-1)}$. Pour trouver des coefficients a, b, c, d qui vérifient cette condition on prend $a \neq 1$, b et c quelconques et $d = \frac{b(c-1)}{a-1}$; ou alors on prend $a = 1$, d quelconque, $b = 0$ ou $c = 1$.

Exercice 3. *Bijections.*

a) Démontrer que si deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient $f \circ g(y) = y$ et $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$ alors elles sont bijectives.

Tout élément y de l'ensemble F a pour antécédent (par f) l'élément $g(y)$ de E, parce que $f(g(y)) = y$. Ce qui prouve que

f est surjective. Supposons qu'un des y de Y ait au moins deux antécédents, c'est à dire deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. On aurait alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ce qui fait d'après l'énoncé $x_1 = x_2$. On a démontré qu'il ne peut pas y avoir deux antécédents distincts, et par conséquent f est injective. Elle est surjective et injective donc bijective. La démonstration pour g est la même.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vérifier que $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que f est bijective.

Pour $x \in \mathbb{Q}$ on a $f(f(x)) = f(x) = x$. Pour $x \notin \mathbb{Q}$ on a $f(f(x)) = f(1-x)$; il faut savoir si $1-x$ appartient ou n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ pour pouvoir calculer $f(1-x)$. S'il appartenait à $\mathbb{Q}$ on aurait $1 - x = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers, donc $x = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$ appartiendrait à $\mathbb{Q}$. Ce n'est pas ce qu'on a supposé, on a donc $1 - x \notin \mathbb{Q}$ et $f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. On a prouvé que $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On est dans la situation de la question précédente (avec $f = g$), où on a prouvé que f est bijective.