Ex 2 – a) La fonction $f$, étant continue et strictement monotone sur $A$, établit une bijection de $A$ sur $f(A)$

$$f(A) = f([-3,-1]) = [1,9]$$

De même $\quad f(D) = f([1,+\infty]) = [1,+\infty]$

Par contre $\quad B = [-2,1] = [-2,0] \cup [0,1]$ et donc

$$f(B) = f([-2,0]) \cup f([0,1])$$
$$= [0,4] \cup [0,1] = [0,4]$$

De même $\quad C = ]-\infty,2] = ]-\infty,0] \cup [0,2]$

d'où $\quad f(C) = f(]-\infty,2]) = [0,+\infty[$

$A \cap B = [-2,-1]$ d'où $f(A \cap B) = [1,4]$

$C \cap D = [1,2]$ d'où $f(C \cap D) = [1,4]$

b) $f(A \cap B) = [1,4]$ et $f(A) \cap f(B) = [1,4]$

$f(C \cap D) = [1,4]$ et $f(C) \cap f(D) = [1,+\infty[$

Ex 3 – On a $\quad A \cup B \subset A$ et $A \cup B \subset B$ d'où

$$f(A) \subset f(A \cup B) \quad \text{et} \quad f(B) \subset f(A \cup B)$$

qui donne l'inclusion $\quad f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Si $x \in A$, alors $y \in f(A)$ et si $x \in B$, $y \in f(B)$
Dans les deux cas, on obtient $y \in f(A) \cup f(B)$ et par suite $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Cette double inclusion fournit l'égalité

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Du fait que $C \subset C \cup D$ et $C \subset C \cup D$, on a

$f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D)$ et $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

d'où l'inclusion $f^{-1}(D) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

Pour tout $x \in f^{-1}(C \cup D)$ on a $f(x) \in C \cup D$

Si $f(x) \in C \cup D$, on a $f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$, ce qui donne $x \in f^{-1}(C)$ ou $x \in f^{-1}(D)$, c'est à dire $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. On obtient ainsi l'inclusion $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(D) \cup f^{-1}(D)$

Finalement, on a obtenu une double inclusion qui donne l'égalité

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(D)$$

Si $f$ est injective, tout $y \in f(A) \cap f(B)$ a un unique antécédent $x$ qui est à la fois dans $A$ et dans $B$ et donc $y \in f(A \cap B)$. Cet argument ne tient plus si $f$ n'est pas injective et l'exemple suivant montre que le résultat n'est plus toujours vrai. Avec $A=[-1,0]$, $B=[0,1]$ et $f(x)=x^2$ on a $A\cap B=\{0\}$, d'où $f(A\cap B)=\{0\}$ alors que $f(A)\cap f(B)=[0,1]\cap[0,1]=[0,1]$