| | |
|---|---|
| Université de Provence | 2006–2007 |

**Deuxième session - Corrigé (ateliers)**

VENDREDI 15 JUIN 2007

**I Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$. On notera $A^c$ le complémentaire de $A$ dans $E$, et $B^c$ celui de $B$. Démontrer les équivalences**

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A^c.$$

*Réponse: Il est équivalent de dire que $A \cap B$ est vide (c'est à dire $A$ et $B$ n'ont pas d'élément commun), ou que $A$ est inclus dans $B^c$ (c'est à dire les éléments de $A$ n'appartiennent pas à $B$), ou que $B$ est inclus dans $A^c$ (c'est à dire les éléments de $B$ n'appartiennent pas à $A$).*

**II Étant donné un ensemble $E$ et un sous-ensemble $F$ de $E$, on définit une relation $\mathcal{R}_F$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant: $A\mathcal{R}_F B$ lorsque $A \cap F \subset B \cap F$ et $B \cap F^c \subset A \cap F^c$.**

**1) Démontrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total?**

*Réponse: Réflexivité: $A\mathcal{R}_F A$ est vrai parce que $A \cap F \subset A \cap F$ et $A \cap F^c \subset A \cap F^c$.*

*Antisymétrie: Si $A\mathcal{R}_F B$ et $B\mathcal{R}_F A$ alors $A \cap F \subset B \cap F$, $B \cap F^c \subset A \cap F^c$, $B \cap F \subset A \cap F$, $A \cap F^c \subset B \cap F^c$. On a donc les inclusions dans les deux sens et par conséquent $A \cap F = B \cap F$, $A \cap F^c = B \cap F^c$. Finalement*

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap F^c) = (B \cap F) \cup (B \cap F^c) = B.$$

*Transitivité: Si $A\mathcal{R}_F B$ et $B\mathcal{R}_F C$ alors $A \cap F \subset B \cap F$, $B \cap F^c \subset A \cap F^c$, $B \cap F \subset C \cap F$, $C \cap F^c \subset B \cap F^c$, d'où on déduit $A \cap F \subset C \cap F$, $C \cap F^c \subset A \cap F^c$, c'est à dire $A\mathcal{R}_F C$.*

*Ordre non total: Par exemple on ne peut pas comparer $F$ et $F^c$ au moyen de la relation $\mathcal{R}_F$, c'est à dire on n'a ni $F\mathcal{R}_F F^c$ ni $F^c\mathcal{R}_F F$, sauf si $E$ est vide. Par exemple si on avait $F\mathcal{R}_F F^c$, on aurait $F \cap F \subset F^c \cap F = \emptyset$ et $F^c \cap F^c \subset F \cap F^c = \emptyset$, donc $F$ et $F^c$ seraient vides, et leur réunion qui est égale à $E$ serait vide.*

**2) Exemple: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble $\{A, B\}$ pour la relation $\mathcal{R}_F$.**

*Réponse: C'est $\{3, 4, 5\}$ et $\{0, 1\}$.*

**III** Sachant que $\mathbb{R}$ est un groupe pour l'addition, démontrer que l'ensemble

$$G = \{p \ln 3 - q \ln 2 \ / \ p, q \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

*Réponse: $G$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et l'addition (dans l'ensemble $G$) a les propriétés suivantes:*

*C'est une loi interne c'est à dire* $(p\ln 3 - q\ln 2) + (p'\ln 3 - q'\ln 2) = (p+p')\ln 3 - (q+q')\ln 2$ *appartient à* $G$.

*Elle est associative: sachant (d'après l'énoncé) que* $x+(y+z) = (x+y)+z$ *pour tous les éléments* $x, y, z$ *de* $\mathbb{R}$, *c'est aussi vrai pour tous les éléments de* $G$.

*Elle admet un élément neutre: en effet l'élément neutre de* $(\mathbb{R}, +)$, *qui est* $0$, *appartient à* $G$ *en ce sens que* $0 = 0\ln 3 - 0\ln 2$.

*Chaque élément de* $G$ *admet un symétrique: le symétrique (dans* $G$*) de* $p\ln 3 - q\ln 2$ *est* $(-p)\ln 3 - (-q)\ln 2$ *puisque la somme de ces deux éléments de* $G$ *vaut* $0$.

*Donc* $G$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$.

## IV On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n} \ .$$

**1) Trouver une majoration de $u_n$ , de façon à pouvoir en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.**

*Réponse: Comme* $\dfrac{3}{k}$ *est plus petit ou égal à* $1$ *pour tout* $k \geq 3$, *on a la majoration*

$$u_n \leq \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n} \ .$$

$u_n$ *est donc compris entre* $0$ *et une suite qui tend vers* $0$, *par conséquent sa limite est nulle.*

**2) Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . Est-elle monotone?**

*Réponse:* $u_1 = 3$, $u_2 = \dfrac{9}{2}$, $u_3 = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$, *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante à partir du rang* $n = 2$ *parce que* $u_{n+1} = \dfrac{3}{n+1}u_n \leq u_n$ *pour tout* $n \geq 2$.

**3) Déterminer, s'ils existent, les plus petit et plus grand éléments, les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des $u_n$ .**

*Réponse: Il n'y a pas de plus petit élément: pour chaque élément* $u_n$ *il existe un autre élément plus petit, qui est* $u_{n+1}$ *(si* $n \geq 3$*) ou (par exemple)* $u_5 = \dfrac{81}{40}$ *(si* $n = 1$ *ou* $2$*).*

*Le plus grand élément,* $u_2 = \dfrac{9}{2}$, *est également la borne supérieure. La borne inférieure est* $0$, *parce que* $0$ *minore les* $u_n$ *et tout autre minorant des* $u_n$ *est plus petit ou égal à* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.