Université de Provence	2008–2009

Corrigé de l'atelier

LUNDI 15 SEPTEMBRE

Les cinq premières questions portent sur la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x+9}{2x+3}\ .$$

1) Mettre $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{cx+d}$.

$f(x) = \dfrac{2\cdot(2x+3)+3}{2x+3} = 2 + \dfrac{3}{2x+3}$.

2) En déduire la valeur de $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $\ldots$, et des primitives de f. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

Compte tenu que $f(x) = 2 + 3\cdot(2x+3)^{-1}$, et compte tenu que la dérivée de u^α est $\alpha u^{\alpha-1}u'$, on a

$f'(x) = 3\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}\cdot 2$

$f''(x) = 3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(2x+3)^{-3}\cdot 2^2$

$f'''(x) = 3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(2x+3)^{-4}\cdot 2^3$

$\vdots$

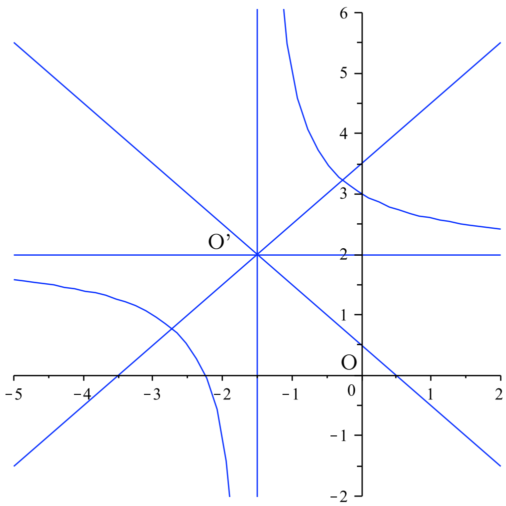
$f^{(n)}(x) = 3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)\cdot(2x+3)^{-n-1}\cdot 2^n$

ce qui fait $f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot 2^n\cdot n!\cdot\dfrac{3}{(2x+3)^{n+1}}$.

Les primitives de f sont les fonctions $F(x) = 2x + \dfrac{3}{2}\cdot\ln|2x+3| + C$, pour toute constante $C\in\mathbb{R}$, parce que la dérivée de $\ln|2x+3|$ est $\dfrac{2}{2x+3}$.

D'autre part, comme $f(x) - 2 = \dfrac{3}{2x+3}$ on a $(f(x)-2)^2 = \dfrac{9}{(2x+3)^2}$ d'où $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\cdot(f(x)-2)^2$.

3) Faire le tableau de variations et tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f.



4) Qu'appelle-t-on asymptotes de $\mathcal{C}$? Trouver les équations des axes de symétrie de $\mathcal{C}$ et celles des deux tangentes à $\mathcal{C}$ qui sont parallèles à un des axes de symétrie.

Les asymptotes de cette courbe ce sont les deux droites parallèles aux axes, la courbe se rapprochant de ces droites quand x ou y tend vers l'infini.

Pour les axes de symétrie, le plus simple est de changer d'origine: on appelle O' l'intersection des asymptotes, ses coordonnées sont $-\frac{3}{2}$ et 2. On a vu que $f(x) = 2 + \dfrac{3}{2x+3}$, on a donc

$$f(x) - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{3}{2}} \ . \tag{1}$$

La courbe de f c'est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $y = f(x)$. Les coordonnées de ce même point dans le nouveau repère (formé par les asymptotes) sont $X = x + \frac{3}{2}$ et $Y = y - 2$, et d'après (1) elles vérifient

$$Y = \frac{\frac{3}{2}}{X} \ .$$

La courbe est symétrique par rapport à la bissectrice des asymptotes, parce que le symétrique du point $(X; Y)$ c'est le point $(Y; X)$, et si le premier est sur la courbe alors le second aussi ($Y = \frac{\frac{3}{2}}{X}$ équivaut à $X = \frac{\frac{3}{2}}{Y}$).

On fait de même pour le $2^{\text{ème}}$ axe de symétrie, et en translatant le premier on obtient les tangentes qui lui sont parallèles. Cependant il faut donner la réponse en utilisant les coordonnées x et y. On obtient que

les axes de symétries ont pour équations $y - 2 = x + \frac{3}{2}$ et $y - 2 = -x - \frac{3}{2}$ (qu'on peut mettre sous la forme $y = ax + b$),

les tangentes parallèles au premier axe de symétrie ont pour équations $y - 2 - \sqrt{\frac{3}{2}} = x + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $y - 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} = x + \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5) Résoudre l'équation $f(x) = x$. Calculer les premiers termes de la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$, ..., jusqu'à ce que ses 8 premières décimales soient égales à celles de l'une des solutions de l'équation. Expliquer pourquoi cette solution est égale à la limite de la suite.

Les solutions sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \simeq 2.386000936$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{73}}{4} \simeq -1.886000936$. Les valeurs de $u_0, \ldots, u_{10}$ avec 9 décimales sont

0

3

$2,333333333$

$2,391304348$

$2,38547486$

$2,386053199$

$2,385995745$

$2,386001452$

$2,386000885$

$2,386000941$

$2,386000936.$

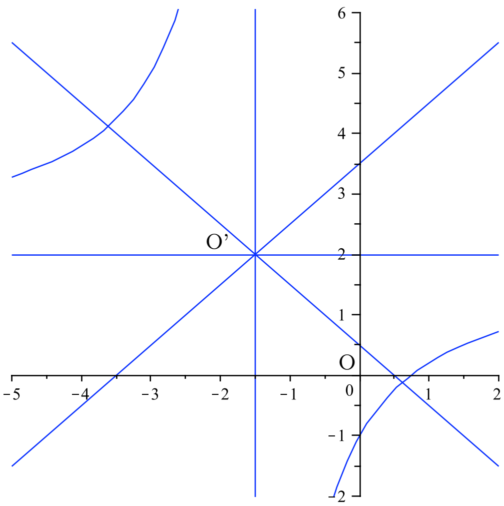
Les valeurs sont les mêmes pour $u_{11}, u_{12}, \ldots$. Pour démontrer que r_1 est la limite de la suite il suffit de démontrer par récurrence l'inégalité

$$|u_{n+1} - r_1| \leq \frac{2}{3} \cdot |u_n - r_1| \ .$$

6) Répondre aux mêmes questions pour la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{4x-3}{2x+3} \ .$$

$g(x) = \dfrac{2 \cdot (2x+3) - 9}{2x+3} = 2 - \dfrac{9}{2x+3}$ et par conséquent à la question 2 il suffit de multiplier les dérivées successives par -3; pour les primitives, ne pas changer le terme $2x$ mais multiplier l'autre par -3. La fonction f est décroissante tandis que g est croissante. La courbe de f passe par les points de coordonnées $(X;Y) = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et celle de g par les points de coordonnées $(X;Y) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. L'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution réelle.



6
5
4
3
O'
2
1
O
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
-1
-2