Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Mercredi 17 septembre

Démontrer que tout graphe G non connexe à n sommets possède au plus

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arètes.

Si G n'est pas connexe, il est forcément la réunion de deux sous-graphes G_1 et G_2 qui ne sont reliés par aucune arète. Le nombre de sommets de G_1 est un entier $n_1 \geq 1$ et celui de G_2 est un entier $n_2 \geq 1$ et la somme des deux c'est à dire $n_1 + n_2$ est égale à n.

D'après le cours, si un graphe a n_1 sommets il a au plus $\frac{n_1(n_1-1)}{2}$ arètes et s'il a n_2 sommets il a au plus $\frac{n_2(n_2-1)}{2}$ arètes. G a donc au plus $\frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2}$ arètes, et ce qu'on veut démontrer c'est que cette expression est inférieure ou égale à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

C'est équivalent de démontrer que la différence est positive; on calcule donc cette différence (qui se simplifie forcément si on pense à remplacer n par $n_1 + n_2$):

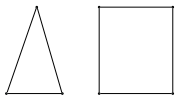
$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \left(\frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2}\right) &= \frac{n^2 - 3n + 2 - {n_1}^2 + n_1 - {n_2}^2 + n_2}{2} \\
&= \frac{{n_1}^2 + 2n_1n_2 + {n_2}^2 - 3n_1 - 3n_2 + 2 - {n_1}^2 + n_1 - {n_2}^2 + n_2}{2} \\
&= \frac{2n_1n_2 - 2n_1 - 2n_2 + 2}{2} \\
&= n_1n_2 - n_1 - n_2 + 1 \\
&= (n_1 - 1)(n_2 - 1)
\end{aligned}$$

est positif puisque $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$.

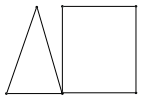
Autre démonstration plus rapide: on peut associer a tout graphe G (non connexe à n sommets) un autre graphe G' à $n-1$ sommets qui a exactement autant d'arètes que G. Comme d'après le cours tout graphe à $n-1$ sommets a au plus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arètes, on en déduit que G a au plus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arètes.

On définit ce graphe G' de la façon suivante, sur un exemple mais on peut faire de même avec tout graphe G non connexe à n sommets:

si G est le graphe non connexe à 7 sommets suivant:



on fait coïncider un des sommets du sous-graphe de gauche avec un des sommets du sous-graphe de droite, d'où un graphe G' à 6 sommets:



qui ne peut avoir plus de $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ arètes, et G a autant d'arètes que G'.