Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Mercredi 1er octobre 2008

Nombres complexes et trigonométrie

On rappelle que les nombres complexes se mettent sous la forme $z = x+iy$ avec x et y réels, et aussi sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, où le nombre complexe $e^{i\theta}$ est défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exercice 1. *Forme $\rho e^{i\theta}$.*

Mettre le nombre complexe $z = 1 + i\tan\alpha$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ $\left(\text{on distinguera les cas } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\right)$.

En remplaçant $\tan\alpha$ par sa valeur et en réduisant au même dénominateur on a (quelque soit α)

$$z = 1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}}.$$

Ce faisant on l'a mis sous la forme $\rho e^{i\theta}$, mais d'après le rappel il faut que ρ soit positif. On n'a donc répondu à la question que dans le cas $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ puisque dans ce cas $\frac{1}{\cos\alpha}$ est positif.

Dans le cas $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ on a

$$z = \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha} = \frac{-1}{\cos\alpha}(-1)e^{i\alpha};$$

mais on sait que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, on a donc

$$\frac{-1}{\cos\alpha}(-1)e^{i\alpha} = \frac{-1}{\cos\alpha}e^{i\pi}e^{i\alpha} = \boxed{\frac{-1}{\cos\alpha}e^{i(\pi+\alpha)}}$$

et dans ce cas ρ vaut $\frac{-1}{\cos\alpha}$ (qui est positif) et θ vaut $\pi + \alpha$.

Exercice 2. *Quand un nombre complexe $z = x+iy$ est égal à son conjugué $\overline{z} = x - iy$.*

a) Soit $z = x + iy$. Démontrer que z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

$$\begin{aligned} z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad & x + iy = x - iy \\ & iy = -iy \\ & 2iy = 0 \\ & y = 0 \\ & z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) En déduire que $\dfrac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{ia}e^{ib}}$ est réel pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ (utiliser les formules sur les conjugués).

Le conjugué de $\dfrac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{ia}e^{ib}}$ est $\dfrac{e^{-ia} + e^{-ib}}{1 + e^{-ia}e^{-ib}} = \dfrac{\frac{1}{e^{ia}} + \frac{1}{e^{ib}}}{1 + \frac{1}{e^{ia}}\frac{1}{e^{ib}}}$. En réduisant au même dénominateur, cette fraction est égale à $\dfrac{\frac{e^{ia}+e^{ib}}{e^{ia}e^{ib}}}{\frac{e^{ia}e^{ib}+1}{e^{ia}e^{ib}}}$ et en simplifiant par $e^{ia}e^{ib}$ on retombe sur $\dfrac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{ia}e^{ib}}$, ce qui prouve que ce nombre complexe est égal à son conjugué et, compte tenu de la question précédente, qu'il appartient à $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Dérivées.*

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. La dérivée est définie de la même façon que pour les fonctions réelles:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

a) Si $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$, démontrer que $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$.

Il est démontré en classe de première que la dérivée d'une somme d'applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est égale à la somme de leurs dérivées. La démonstration est la même pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire que la dérivée de la fonction $f(x) = e^{i\omega x}$ (avec $\omega \in \mathbb{R}$) est $f'(x) = i\omega e^{i\omega x}$.

En terminale il est démontré que la dérivée de e^u est $u'e^u$ (si $u = u(x)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Ça ne sert à rien dans le cas $u(x) = i\omega x$, la définition de l'exponentielle complexe n'ayant rien à voir avec celle de l'exponentielle réelle. On écrit donc $f(x) = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$ puis on dérive:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\omega\sin(\omega x) + i\omega\cos(\omega x) \\
&= i^2\omega\sin(\omega x) + i\omega\cos(\omega x) \\
&= i\omega(i\sin(\omega x) + \cos(\omega x)) \\
&= i\omega e^{i\omega x}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. *Calcul d'une infinité de valeurs de la fonction cosinus.*

a) Sachant que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, démontrer la formule

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Sachant aussi que $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos x}{2} &= \frac{1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \\
&= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

b) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{4}$, $cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{\pi}{16}$, ... , $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{\ldots}}{2}$.

La formule qu'on a démontré équivaut à $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+2\cos x}}{2}$. On a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2} \quad \text{(où on prend } n-1 \text{ fois la racine).}$$