Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Lundi 6 octobre 2008

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Exercice 1. *Racines cubiques de l'unité.*

On note habituellement j la racine cubique de 1 de partie imaginaire strictement positive:

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

a) Vérifier que j^3 est effectivement égal à 1 (sans utiliser les cosinus et sinus), de même que $(j^2)^3$. Donc j et j^2 sont deux racines cubiques de 1; quelle est la troisième?

$j^3 = e^{3\cdot\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi}$ est égal à 1 parce que $e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$. De même pour $(j^2)^3$. La troisième racine cubique de 1 est 1.

b) Vérifier que les trois nombres

$$r_1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \qquad r_2 = j\sqrt[3]{2} + j^2\sqrt[3]{4}, \qquad r_3 = j^2\sqrt[3]{2} + j\sqrt[3]{4}$$

sont solutions de l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$.

Pour calculer $(r_1)^3, (r_2)^3$ et $(r_3)^3$ on utilise la formule

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

qu'on met sous la forme

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

1er calcul: on remplace dans cette formule, a par $\sqrt[3]{2}$ et b par $\sqrt[3]{4}$. Compte tenu que $a^3 = 2$, $b^3 = 4$, $ab = \sqrt[3]{2\cdot 4} = 2$ et $a + b = r_1$, on obtient

$$(r_1)^3 = 2 + 4 + 6r_1$$

et on a bien $(r_1)^3 - 6r_1 - 6 = 0$.

2ème calcul: on remplace dans la formule, a par $j\sqrt[3]{2}$ et b par $j^2\sqrt[3]{4}$. Compte tenu que $a^3 = 2j^3 = 2$, $b^3 = 4j^6 = 4$, $ab = j^3\sqrt[3]{2\cdot 4} = 2$ et $a + b = r_2$, on obtient

$$(r_2)^3 = 2 + 4 + 6r_2$$

et on a bien $(r_2)^3 - 6r_2 - 6 = 0$.

3ème calcul: on remplace dans la formule, a par $j^2\sqrt[3]{2}$ et b par $j\sqrt[3]{4}$. Compte tenu que $a^3 = 2j^6 = 2$, $b^3 = 4j^3 = 4$, $ab = j^3\sqrt[3]{2\cdot 4} = 2$ et $a + b = r_3$, on obtient

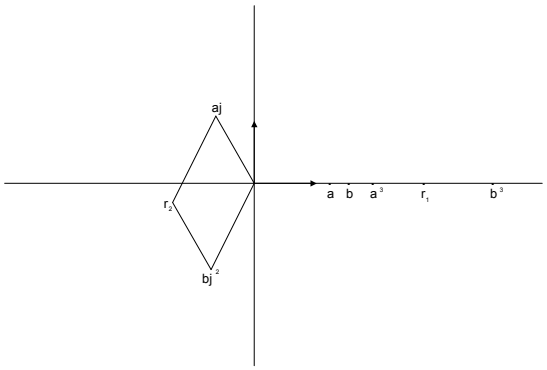
$$(r_3)^3 = 2 + 4 + 6r_3$$

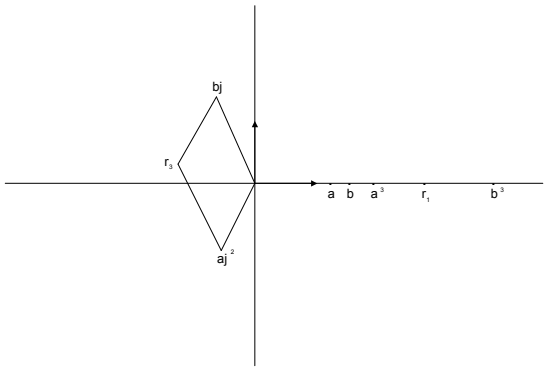
et on a bien $(r_3)^3 - 6r_3 - 6 = 0$.

c) Compte tenu que $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$ et $\sqrt[3]{4} \simeq 1,59$, placer approximativement dans le plan complexe les onze points d'affixes respectifs

$$a = \sqrt[3]{2}, \qquad ja, \qquad j^2a, \qquad a^3, \qquad b = \sqrt[3]{4}, \qquad jb, \qquad j^2b, \qquad b^3, \qquad r_1, \qquad r_2, \qquad r_3$$

(pour placer r_2 et r_3 on tracera des parallélogrammes).





Exercice 2. *Dérivation.*

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe; par définition e^z est égal à $e^x e^{iy}$ c'est à dire à $e^x(\cos y + i \sin y)$.

a) Le nombre complexe $a = a_1 + ia_2$ étant fixé, on définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en posant

$$f(x) = e^{ax}.$$

Remplacer a par $a_1 + ia_2$ et exprimer $f(x)$ en utilisant uniquement l'exponentielle réelle, les cosinus et les sinus. En déduire la valeur de $f'(x)$. A-t-on $f'(x) = ae^{ax}$?

$f(x) = e^{a_1 x}\cos(a_2 x) + ie^{a_1 x}\sin(a_2 x)$;

$f'(x) = a_1 e^{a_1 x}\cos(a_2 x) - a_2 e^{a_1 x}\sin(a_2 x) + ia_1 e^{a_1 x}\sin(a_2 x) + ia_2 e^{a_1 x}\cos(a_2 x)$.

On calcule aussi

$$\begin{aligned} ae^{ax} &= (a_1 + ia_2)\,(e^{a_1 x}\cos(a_2 x) + ie^{a_1 x}\sin(a_2 x)) \\ &= a_1 e^{a_1 x}\cos(a_2 x) + ia_2 e^{a_1 x}\cos(a_2 x) + a_1 ie^{a_1 x}\sin(a_2 x) - a_2 e^{a_1 x}\sin(a_2 x) \end{aligned}$$

et on constate qu'il est égal à $f'(x)$.

b) On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \ln(|x + a|).$$

Si a_2 est nul démontrer que $g'(x) = \dfrac{1}{x+a}$ (rappel: $|x + a|$ est égal à $x + a$ si $x + a > 0$ et à $-(x + a)$ si $x + a < 0$).

Si a_2 n'est pas nul, calculer $g(x)$ en fonction de a_1 et a_2 puis calculer $g'(x)$ $\Big($rappel: pour tout $\alpha > 0$ on a $\ln\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(\alpha)\Big)$. A-t-on $g'(x) = \dfrac{1}{x+a}$?

Si a_2 est nul alors a est réel, et $g(x)$ vaut $\ln(x + a)$ ou $\ln(-x - a)$ suivant que $x + a$ est positif ou négatif. Mais dans les deux cas, d'après la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ on a $\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{x+a}}$.

Si a_2 n'est pas nul on calcule

$|x + a| = \sqrt{(x + a_1)^2 + (a_2)^2}$,

$g(x) = \ln\left(\sqrt{(x + a_1)^2 + (a_2)^2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left((x + a_1)^2 + (a_2)^2\right)$,

$g'(x) = \dfrac{2(x + a_1)}{(x + a_1)^2 + (a_2)^2} = \boxed{\dfrac{2(x + a_1)}{|x + a|^2}}$.

Visiblement il n'est pas égal à $\dfrac{1}{x+a}$, d'autant moins que $\dfrac{1}{x+a}$ est un nombre complexe alors que $\dfrac{2(x + a_1)}{|x + a|^2}$ est un nombre réel.

Exercice 3. *Racines* $22^{\text{ièmes}}$ *de l'unité.*

a) On pose $\zeta = e^{\frac{i\pi}{11}}$, vérifier que $\zeta^{22} = 1$. Que vaut ζ^{11}?

$\zeta^{22} = e^{22\cdot\frac{i\pi}{11}} = e^{2i\pi}$ est égal à 1 parce que $e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$. De même $\zeta^{11} = e^{11\cdot\frac{i\pi}{11}} = e^{i\pi}$ est égal à -1 parce que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

b) Soit $S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$, vérifier par les formules d'Euler que

$$S = \frac{1}{2}\left(\zeta + \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^9\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta^{-1} + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} + \zeta^{-7} + \zeta^{-9}\right).$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} + \frac{\zeta^3 + \zeta^{-3}}{2} + \frac{\zeta^5 + \zeta^{-5}}{2} + \frac{\zeta^7 + \zeta^{-7}}{2} + \frac{\zeta^9 + \zeta^{-9}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\zeta + \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^9\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta^{-1} + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} + \zeta^{-7} + \zeta^{-9}\right). \end{aligned}$$

c) En utilisant les sommes géométriques de raison ζ^2 et ζ^{-2}, exprimer S en fonction de $\zeta, \zeta^2, \zeta^{-1}$ et ζ^{-2}. Simplifier et en déduire la valeur de S.

En posant $\alpha = \zeta^2$ on a

$$\begin{aligned} S &= \frac{\zeta}{2}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4\right) + \frac{\zeta^{-1}}{2}\left(1 + \left(\alpha^{-1}\right) + \left(\alpha^{-1}\right)^2 + \left(\alpha^{-1}\right)^3 + \left(\alpha^{-1}\right)^4\right) \\ &= \frac{\zeta}{2}\cdot\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} + \frac{\zeta^{-1}}{2}\cdot\frac{1-\left(\alpha^{-1}\right)^5}{1-\alpha^{-1}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta - \zeta^{11}}{1-\zeta^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta^{-1} - \zeta^{-11}}{1-\zeta^{-2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta+1}{1-\zeta^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta^{-1}+1}{1-\zeta^{-2}}. \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta+1}{1-\zeta^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1+\zeta}{\zeta}}{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta+1}{1-\zeta^2} + \frac{\zeta}{2}\cdot\frac{1+\zeta}{\zeta^2-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2}\right)\frac{\zeta+1}{1-\zeta^2} \\ &= \frac{1-\zeta}{2}\cdot\frac{\zeta+1}{1-\zeta^2} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$