Licence MI - Atelier de mathématiques - Corrigé de la $2^{\text{ème}}$ session

SEPTEMBRE 2009

I

On définit une suite (u_n) en posant

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

a) Vérifier par récurrence les inégalités $\frac{1}{16} \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ pour tout entier $n \geq 1$. *(sur 2 pts)*

$u_1 = \frac{1}{4}$ vérifie les inégalités $\frac{1}{16} \leq u_1 \leq \frac{1}{4}$. Soit n un entier pour lequel $\frac{1}{16} \leq u_n \leq \frac{1}{4}$. Alors $u_n - \frac{1}{2}$ est compris entre $-\frac{7}{16}$ et $-\frac{1}{4}$; son carré est compris entre $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ et $\left(-\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{49}{256}$, on a donc $\frac{1}{16} \leq u_{n+1} \leq \frac{49}{256} \leq \frac{1}{4}$.

b) Trouver les deux solutions α et β de l'équation $x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, avec $\alpha < \beta$. Démontrer que si la suite (u_n) converge, sa limite ne peut être que α. *(sur 1,5+0,5 pts)*

Cette équation équivaut à $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$, ses solutions sont $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,13$ et $\beta = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1,87$. Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, l'égalité $u_{n+1} = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2$ par passage à la limite donne $\ell = \left(\ell - \frac{1}{2}\right)^2$, ce qui fait que ℓ ne peut valoir que α ou β. Comme d'après la question précédente les u_n sont compris entre $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{4}$, leur limite ne peut valoir que α.

c) Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe $c \in \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$ tel que

$$\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c).$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{7}{8}. \quad \textit{(sur 1+2 pts)}$$

Le théorème des accroissements finis dit qu'il existe c compris entre u_n et α tel que $\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$. Compte tenu des inégalités de la question a), c est compris entre $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{4}$. Mais $f(u_n)$ vaut u_{n+1}, $f(\alpha)$ vaut α par définition de α, et $f'(c)$ vaut $2c - 1$ qui est compris entre $-\frac{7}{8}$ et $-\frac{1}{2}$, d'où $\left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{7}{8}$.

d) Démontrer par récurrence l'inégalité $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n$ et en déduire que la suite (u_n) converge vers α. *(sur 1,5+0,5 pts)*

L'inégalité $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n$ est vraie pour $n = 0$ ou 1: $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1$ et $|u_1 - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{8}$.

Supposons la vraie à un rang $n \geq 1$, alors d'après la dernière inégalité de la question c) on a $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{7}{8}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}$, ce qui prouve par récurrence sur $n \geq 1$ l'inégalité $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n$. Comme $\left(\frac{7}{8}\right)^n$ tend vers 0, la suite (u_n) converge vers α.

II

a) Calculer les primitives des fonctions

$$f(x) = x^2 \ln x, \; g(x) = \frac{1}{2 + x^2}, \; h(x) = \frac{2x + 3}{3x + 4}. \quad \textit{(sur 1+1+1 pts)}$$

En intégrant par parties, $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \boxed{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C}$ (C constante).

$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx$. Avec le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ cette primitive est égale à $\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot \sqrt{2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u + C = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C}$.

On met $\frac{2x+3}{3x+4}$ sous la forme $a + \frac{b}{3x+4}$ c'est à dire sous la forme $\frac{a(3x+4)+b}{3x+4} = \frac{3ax+4a+b}{3x+4}$. On a alors $\begin{cases} 3a = 2 \\ 4a+b=3 \end{cases}$ ce qui fait $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. Puis on intègre $a + \frac{b}{3x+4}$; on obtient $\int \frac{2x+3}{3x+4}\,dx = ax + \frac{b}{3} \ln|3x+4| + C = \boxed{\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\ln|3x+4| + C}$.

b) Résoudre les équations différentielles

$$y' \tan x - y \sin x = 0,\ y' - y = x+1,\ y' + y = e^x$$

(une solution particulière de la deuxième équation est de la forme $y = ax+b$ et une solution particulière de la troisième est de la forme $y = ce^x$, avec a, b et c constantes). *(sur 1+1+1 pts)*

La solution générale de $y' \tan x - y \sin x = 0$ est $y = e^{\int \frac{\sin x}{\tan x}\,dx} = e^{\int \cos x\,dx} = e^{\sin x + C} = \boxed{Ke^{\sin x}}$ (C et K constantes).

$y = ax+b$ est solution de $y' - y = x+1$ si et seulement si $a - (ax+b) = x+1$, ce qui fait $-ax + (a-b) = x+1$ c'est à dire $a = -1$, $b = -2$ et $y = -x-2$. D'autre part la solution générale de $y' - y = 0$ est $y = e^{\int 1\,dx} = e^{x+C} = Ke^x$ (C et K constantes). La solution générale de $y' - y = x+1$ est donc $\boxed{y = -x-2+Ke^x}$.

$y = ce^x$ est solution de $y' + y = e^x$ si et seulement si $ce^x + ce^x = e^x$, ce qui fait $2c = 1$, $c = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}e^x$. D'autre part la solution générale de $y' + y = 0$ est $y = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x+C} = Ke^{-x}$ (C et K constantes). La solution générale de $y' + y = e^x$ est donc $\boxed{y = \frac{1}{2}e^x + Ke^{-x}}$.

III

Soient les vecteurs $\vec{u}(1,0,1)$ et $\vec{v}(0,2,1)$.

a) Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$. *(sur 1+2 pts)*

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2,-1,2)$.

b) Que valent le cosinus et le sinus de l'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$? *(sur 1+1 pts)*

Son cosinus vaut $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et son sinus vaut $\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

c) Calculer l'aire du triangle de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$. *(sur 1 pt)*

C'est $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{3}{2}$.