MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 1

***Exercice* 0.1** Déterminer la composée de la rotation de centre $(3, \sqrt{3})$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ avec la rotation de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Solution : On appelle R_1 la première rotation et R_2 la deuxième. Il faut composer R_1 avec R_2 c'est à dire pour tout point $M(z)$ du plan il faut déterminer $M''(z'') = R_1(R_2(M))$ (il faut donc d'abord déterminer $M'(z') = R_2(M)$).

Le calcul est plus simple si on met les affixes des centres sous la forme $\rho e^{i\theta}$. Le centre de la première rotation a pour affixe $3 + i\sqrt{3}$; dans cet affixe il faut mettre $2\sqrt{3}$ en facteur si on veut faire apparaître un cosinus et un sinus :

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ce qui permet de le mettre sous la forme $\rho e^{i\theta}$:

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

De même le centre de la deuxième rotation a pour affixe

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

D'après le cours l'affixe z' du point $M' = R_2(M)$ est donné par la formule $z' - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$, où z_0 est l'affixe du centre de la rotation R_2 et α son angle. On a donc

$$z' - e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right).$$

De même l'affixe z'' du point $M'' = R_1(M')$ est donné par la formule

$$z'' - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z' - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right).$$

En combinant les deux formules on obtient

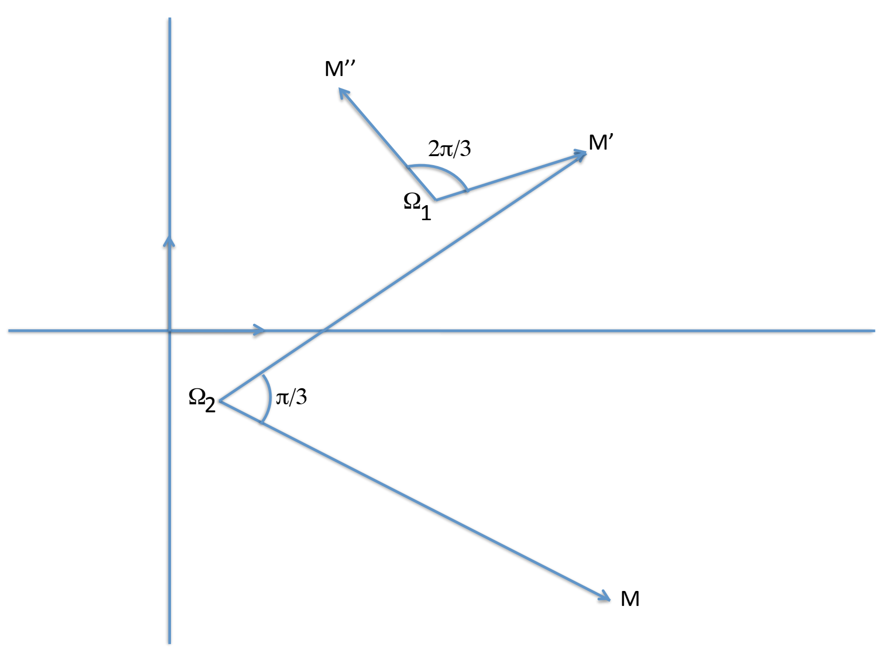
$$z'' - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

puis on simplifie (en utilisant la formule de multiplication des exponentielles $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$) :

$$z'' - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi}z - e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

et on obtient finalement (après avoir calculé les exponentielles)

$$z'' = 3 + i\sqrt{3} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}\frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -z + 7.$$



Pour interpréter la formule $z'' = -z + 7$, soit on utilise le cours, d'après lequel $z'' = e^{i\beta}z + b$ est l'expression analytique d'une rotation d'angle β (avec $b = -7$ et $e^{i\pi} = -1$ c'est à dire $\beta = \pi$), et l'affixe du centre de cette rotation est la solution de l'équation $z = -z + 7$ ce qui fait $z = \frac{7}{2}$.

Soit on remarque que cette formule équivaut à $\frac{z'' + z}{2} = \frac{7}{2}$, ce qui signifie que le milieu du segment $[MM'']$ a pour affixe $\frac{7}{2}$, et que M'' est le symétrique de M par rapport à ce point.

La réponse à la question est donc que la composée de R_1 et R_2 est la rotation d'angle π centrée au point d'affixe $\frac{7}{2}$, ce qui revient à dire que c'est une symétrie par rapport à ce point.

***Exercice* 0.2** Quelle est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(1, 0)$ avec la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$?

Solution : Pour la rotation R on a $z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$ et, pour la translation T, $z'' = z' + 1$. L'expression analytique de $T \circ R$ est donc

$$z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 1.$$

D'après le cours c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'affixe z_0 de son centre est la solution de l'équation $z = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 1$ ce qui fait $z_0 = \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}$ et, compte tenu que $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$,

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

***Exercice* 0.3** Quelle est la composée de l'homothétie de centre $A(2, 0)$ et de rapport 2 avec la rotation de centre $B(1, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$?

Solution : Pour la rotation R on a $z' - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - 1) = i(z - 1)$ et, pour l'homothétie H, $z'' - 2 = 2(z' - 2)$. L'expression analytique de $H \circ R$ est donc

$$z' = 2iz - 2i.$$

D'après le cours c'est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (parce que $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$). L'affixe z_0 du centre de cette similitude est obtenue en résolvant l'équation $z = 2iz - 2i$. On obtient $z_0 = \frac{4 - 2i}{5}$.

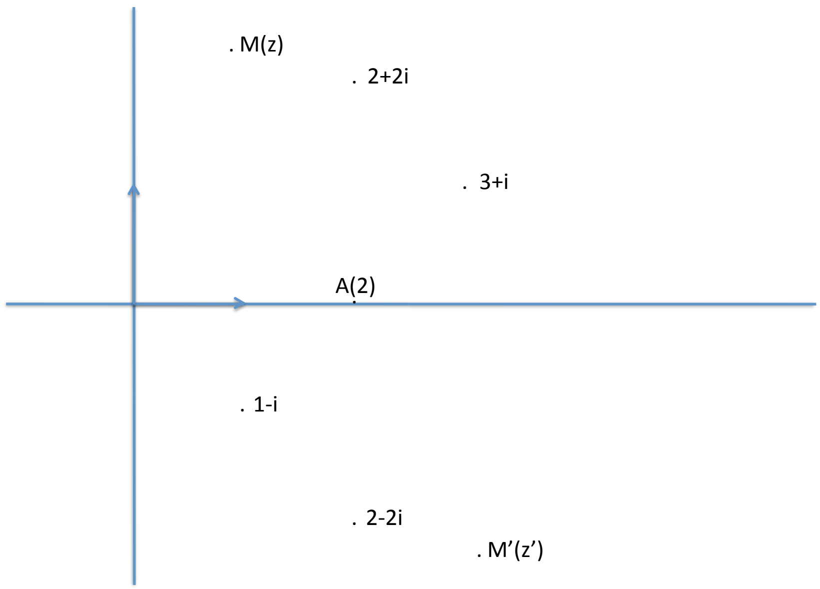
***Exercice* 0.4** Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -z + 4$.

1_a) Placer dans le plan les points d'affixes $3 + i$ et $2 + 2i$ ainsi que leurs transformés par S.

b) Déterminer le point A invariant par S et le placer dans le plan.

c) Démontrer que S associe à tout point M son symétrique par rapport à A.

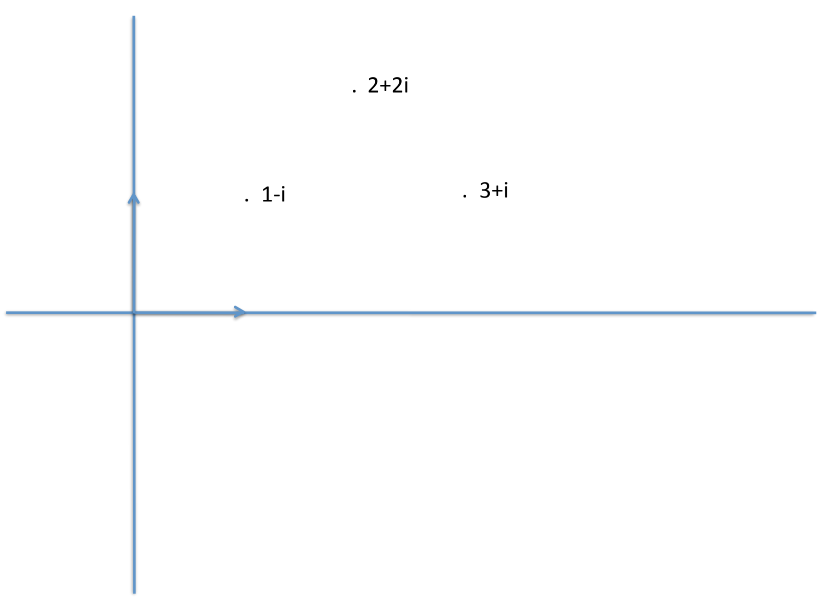
Solution : Le milieu A du segment $[MM']$ a pour affixe $\frac{z + z'}{2} = \frac{z + 4 - z}{2} = 2$. Comme ce point ne bouge pas quand z varie, la transformation S est la symétrie par rapport à A.



2_a) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Placer dans le plan les points d'affixes $3+i$ et $2+2i$ ainsi que leurs transformés par $R \circ S$.

c) Démontrer que $R \circ S$ associe à tout point M son image par une rotation, à préciser.

Solution : L'expression analytique de $R \circ S$ est $z'' = i(-z+4)$, c'est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ parce que $-i = e^{\frac{3\pi}{2}}$. L'image du point d'affixe $2+2i$ par $R \circ S$ est égale à ce point, donc c'est le centre de la rotation (une rotation n'ayant qu'un seul point invariant).



***Exercice* 0.5** On donne les points $A(1,0)$, $B(2,-1)$ et $C(2,3)$ et on considère les homothéties :

H de centre A et de rapport 2,

H' de centre B et de rapport -3,

H'' de centre C et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout point M d'affixe z on pose $M_1 = H' \circ H(M)$ et $M_2 = H'' \circ H(M)$.

a) Exprimer l'affixe z_1 de M_1 en fonction de z et démontrer que M_1 est l'image de M par une homothétie, dont on précisera le centre et le rapport. Vérifier que ce centre est aligné avec A et B.

b) Exprimer l'affixe z_2 de M_2 en fonction de z. Par quelle transformation M_2 est-il l'image de M ? Interpréter les résultats des questions a) et b).

Solution : Pour l'homothétie H on a $z' - 1 = 2(z-1)$ ce qui fait $z' = 2(z-1) + 1 = 2z - 1$. On en déduit $z_1 - (2-i) = -3\big(2z - 1 - (2-i)\big)$ d'où $z_1 = -6z + 11 - 4i$ (homothétie de centre $\Omega\left(\dfrac{11-4i}{7}\right)$ et de rapport -6) ;

$z_2 - (2+3i) = \dfrac{1}{2}\big(2z - 1 - (2+3i)\big)$ d'où $z_2 = z + \dfrac{1+3i}{2}$ (translation de vecteur $\dfrac{1+3i}{2}$).

Les points Ω, A et B sont alignés parce que $\overrightarrow{\Omega A}\left(\frac{-4+4i}{7}\right)$ et $\overrightarrow{\Omega B}\left(\frac{3-3i}{7}\right)$ sont colinéaires.

***Exercice* 0.6** On considère un losange $ABCD$ de centre O et de sens direct.

On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

Dans la liste ci-dessous, cocher toutes les isométries qui transforment le point A en C :

Translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,

Rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$,

Rotation de centre O et d'angle π,

Symétrie de centre O,

Symétrie axiale d'axe (IK),

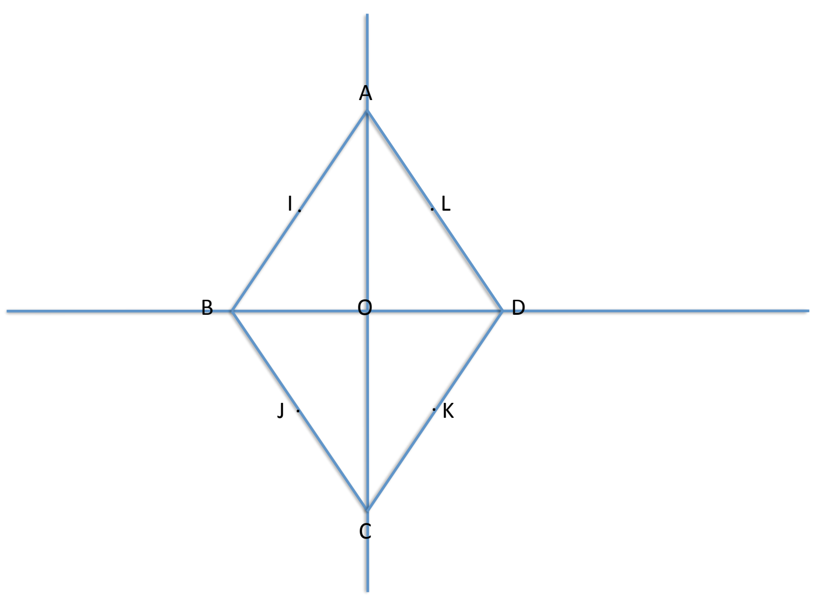
Symétrie axiale d'axe (JL),

Symétrie axiale d'axe (AC),

Symétrie axiale d'axe (BD),

Autre isométrie ?

Solution : La rotation de centre O et d'angle π, c'est à dire la symétrie de centre O, et la symétrie axiale d'axe (BD).



***Exercice* 0.7** a) Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{V}(1,2)$ et $\overrightarrow{W}(-1,3)$?

b) Trouver toutes les similitudes directes qui transforment $\overrightarrow{V}$ en $\overrightarrow{W}$.

Solution : L'angle vaut $\frac{\pi}{4}$*. Il faut faire une rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *puis une homothétie de centre O et de rapport* $\sqrt{2}$.