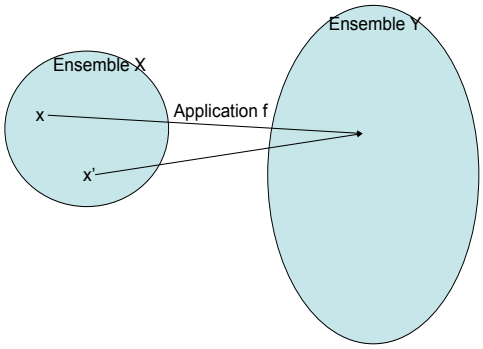
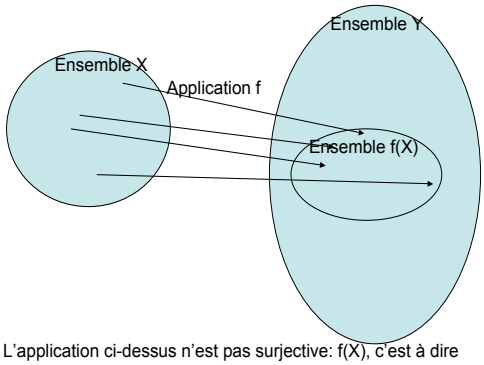
Université de Provence 2007–2008

Corrigé de l'exercice 18 planche 2

Applications, images et images réciproques



L'application ci-dessus n'est pas injective: il existe des éléments distincts x et x' de X tels que f(x)=f(x').



L'application ci-dessus n'est pas surjective: f(X), c'est à dire l'ensemble des images par f de tous les éléments x de X, est sous-ensemble strict de Y.

Exercice 18. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour une partie A de X, ainsi que la définition de $f^{-1}(A')$ pour une partie A' de Y.

$f(A)$ est l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in A$, autrement dit c'est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui ont un antécédent $x \in A$ par f.

(exemple: si f est la fonction sinus, on a $f([0; 2\pi] = [-1; 1]$ parce que seuls les éléments de l'intervalle $[-1; 1]$ sont le sinus d'un élément de $[0; 2\pi]$; mais on a $f([0; \pi]) = [0; 1]$.)

$f^{-1}(A')$ est l'ensemble des $x \in X$ dont l'image par f appartient à A'.

2. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$ et $(A', B') \in \mathcal{P}(Y)^2$,

a) comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$; $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

Chaque élément y de $f(A \cup B)$ est image d'un élément de $A \cup B$: $y = f(x)$ avec $x \in A \cup B$. Comme x appartient à A ou à B, $f(x)$ appartient à $f(A)$ ou à $f(B)$, c'est à dire à $f(A) \cup f(B)$. On a donc l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Vérifions l'inclusion en sens inverse: chaque élément y de $f(A) \cup f(B)$ est dans $f(A)$ ou dans $f(B)$; dans les deux cas il est dans $f(A \cup B)$; on a donc bien $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

L'inclusion dans les deux sens prouve que $\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$.

Chaque élément y de $f(A \cap B)$ est image d'un élément de $A \cap B$: $y = f(x)$ avec $x \in A \cap B$. Comme x appartient à A et à B, $f(x)$ appartient à $f(A)$ et à $f(B)$, c'est à dire à $f(A) \cap f(B)$. On a donc l'inclusion $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$.

On ne peut pas démontrer l'inclusion en sens inverse: chaque élément de $f(A) \cap f(B)$ est image d'un élément de $A \cap B$, mais par contre chaque élément de $f(A) \cap f(B)$ est image d'un élément de A et d'un

élément de B (pas forcément le même).

Exemple: $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}^-$ et $B = \mathbb{R}^+$. On a $A \cap B = \{0\}$ et par conséquent $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, mais par contre $f(A) = \mathbb{R}^+$, $f(B) = \mathbb{R}^+$ et $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}^+$.

b) comparer $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(On pourra généraliser au cas d'une réunion ou d'une intersection quelconque de sous-esnsmbles.)

$f^{-1}(A \cup B)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x)$ appartient à $A \cup B$; ce qui équivaut à dire que:

$f(x)$ appartient à A ou à B,

x appartient à $f^{-1}(A)$ ou à $f^{-1}(B)$,

x appartient à $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

On a donc l'égalité des ensembles $\boxed{f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}$.

$f^{-1}(A \cap B)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x)$ appartient à $A \cap B$; ce qui équivaut à dire que:

$f(x)$ appartient à A et à B,

x appartient à $f^{-1}(A)$ et à $f^{-1}(B)$,

x appartient à $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

On a donc l'égalité des ensembles $\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$.

Généralisation: $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$.

c) comparer $f(A^c)$ et $(f(A))^c$; $f^{-1}(A'^c)$ et $(f^{-1}(A'))^c$.

Les ensembles $f(A^c)$ et $(f(A))^c$ ne sont pas comparables (pour la relation d'inclusion), c'est à dire il n'existe pas de propriété d'inclusion valable pour tous les X, Y, A, f. Par exemple si f est une fonction constante ($f(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et A un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f(A) = f(A^c) = \{C\}$ et par conséquent $f(A^c) = \{C\}$ est disjoint de $(f(A))^c = \mathbb{R} \setminus \{C\}$.

Vérifions maintenant que $f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c$: chaque élément x de l'ensemble X a une image $f(x)$ qui soit appartient à A', soit n'y appartient pas c'est à dire appartient à A'^c. L'ensemble X est donc partagé en deux sous-ensembles disjoints qui sont $f^{-1}(A')$ et $f^{-1}(A'^c)$. Ce qui revient à dire que $f^{-1}(A'^c)$ est le complémentaire de $f^{-1}(A')$, c'est à dire $\boxed{f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c}$.

d) comparer A et $f^{-1}(f(A))$; A' et $f(f^{-1}(A'))$.

A est inclus dans $f^{-1}(f(A))$ parce que tout élément $x \in A$ vérifie $f(x) \in f(A)$ c'est à dire $x \in f^{-1}(f(A))$.

$f(f^{-1}(A'))$ est inclus dans A': tout élément $x \in f(f^{-1}(A'))$ est l'image par f d'un $x' \in f^{-1}(A')$, or cet x' vérifie $f(x') \in A'$, donc $x = f(x') \in A'$.

3. Démontrer les propositions suivantes:

a) $\big(\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(X))^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)\big) \Leftrightarrow f$ **injective.**

Supposons qu'on a $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ pour tous A et B sous-ensembles de X. On a donc cette égalité quand A et B sont des sous-ensembles réduits à un élément; supposons que l'élément a de A et l'élément b de B vérifient $f(a) = f(b)$; alors $f(A)\cap f(B)$ a un seul élément qui est $f(a) = f(b)$; il en est de même de $f(A\cap B)$ (puisqu'on l'a supposé égal à $f(A)\cap f(B)$) ce qui prouve que $A\cap B$ n'est pas vide, c'est à dire $a = b$. L'égalité $f(a) = f(b)$ implique $a = b$, c'est à dire f est injective.

Réciproquement supposons que f est injective. Chaque élément y de $f(A)\cap f(B)$ est l'image d'un élément a de A et d'un élément b de B, d'où $f(a) = f(b)$, et $a = b$ parce que f est injective. Ceci prouve que y est l'image d'un élément de $A\cap B$, $y \in f(A\cap B)$, et on a donc l'inclusion $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$. Comme on a vu à la question 2 l'inclusion en sens inverse, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

b) $\big(\forall A \in \mathcal{P}(X)),\ f^{-1}(f(A)) = A\big) \Leftrightarrow f$ **injective.**

On suppose que $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toutes les parties A de X et on cherche à savoir si f est injective. On cherche donc tous les couples (x, x') d'éléments de X tels que $f(x) = f(x')$. Cette égalité implique $f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\}))$ (où on met des accolades parce que, ne sachant pas encore si f est injective, la notation f^{-1} s'applique à des ensembles et non à des éléments). Compte tenu de l'hypothèse, cette dernière égalité équivaut à $x = x'$; f est donc injective.

Réciproquement supposons f injective. On a vu à la question 2 que l'ensemble $f^{-1}(f(A))$ contient A. Pour vérifier qu'il ne contient pas d'autres éléments que ceux de A on considère un elément $x \in f^{-1}(f(A))$, ce qu'on traduit par: $f(x) \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$, et finalement $x = a$ parce que f est injective. Ceci prouve que les éléments $x \in f^{-1}(f(A))$ appartiennent à A, et finalement $f^{-1}(f(A)) = A$.

c) $\big(\forall A' \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(A')) = A'\big) \Leftrightarrow f$ **surjective..**

Si l'égalité $f(f^{-1}(A')) = A'$ est vraie pour toutes les parties A' de Y, elle l'est aussi pour $A' = Y$, Compte tenu que l'ensemble $f^{-1}(Y)$ (= ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \in Y$) est égal à X, l'égalité $f(f^{-1}(Y)) = Y$ peut s'écrire $f(X) = Y$, et tous les éléments de Y ont donc un antécédent dans X c'est à dire f est surjective.

Réciproquement si f est surjective, l'ensemble $f(f^{-1}(A'))$ qui d'après la question 2 est inclus dans A', est égal à A' parce que tous les éléments y de A' sont (par surjectivité) images d'éléments x de X, d'où $x \in f^{-1}(A')$ (parce que $f(x) = y \in A'$) et $y = f(x) \in f(f^{-1}(A'))$.