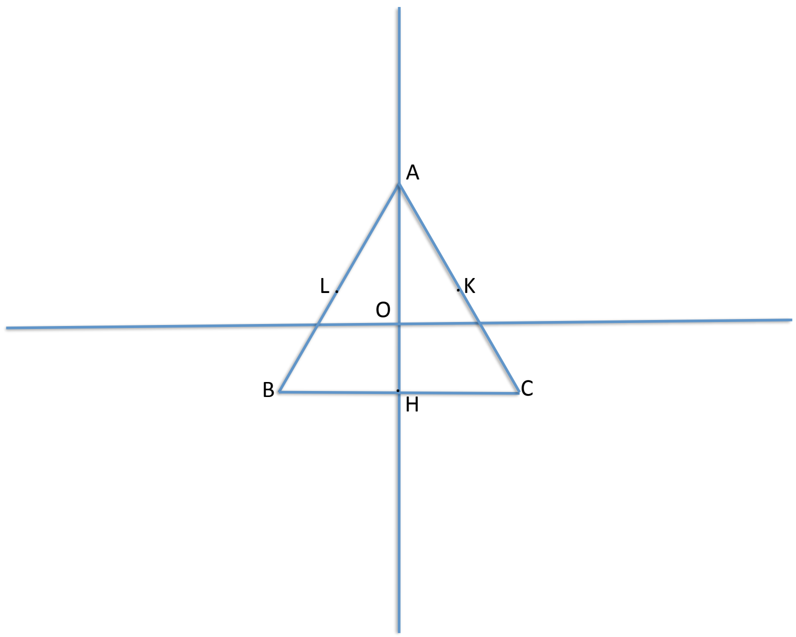
Université de Provence
Semestre 2

Licence SPC
Planche 2

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 2

***Exercice* 0.1** Les six isométries qui conservent le triangle équilatéral sont l'identité Id, la rotation R_1 d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la rotation R_2 d'angle $\frac{4\pi}{3}$, la symétrie S_A par rapport à la hauteur AH, la symétrie S_B par rapport à la hauteur BK, la symétrie S_C par rapport à la hauteur CL.



NB : Il n'y en a pas d'autre : toute autre rotation que Id, R_1 et R_2 transforme le triangle en un autre triangle ; et d'autre part le triangle ne présente pas d'autres symétries que les symétries par rapport aux trois hauteurs.

a) Remplir la table de composition de ces isométries et vérifier qu'elles forment un groupe.

Solution : Pour remplir la table de composition on utilise les propriétés suivantes des transformations : on sait que pour toute transformation T on a $T \circ Id = Id \circ T = T$ (voir cours) ; ceci permet de remplir la première ligne et la première colonne. D'autre part on peut considérer comme évident que la composée d'une rotation d'angle θ et d'une rotation d'angle θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$; que la rotation d'angle 2π est l'identité c'est à dire qu'elle transforme chaque point M en lui-même ; que la composée d'une symétrie avec elle-même est l'identité. Ceci permet de remplir une partie de la table :

$\circ$	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
Id	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	Id			
R_2	R_2	Id	R_1			
S_A	S_A			Id		
S_B	S_B				Id	
S_C	S_C					Id

Ensuite on calcule quelques composées, par exemple $R_1 \circ S_A$, $S_A \circ R_1$ et $S_A \circ S_B$.

La symétrie S_A transforme les segments $[AB], [BC], [CA]$ respectivement en $[AC], [CB], [BA]$. La rotation R_1 transforme ces derniers en $[BA], [AC], [CB]$ et par conséquent $R_1 \circ S_A$ transforme $[AB], [BC], [CA]$ en $[BA], [AC], [CB]$ c'est à dire c'est la symétrie S_C.

La rotation R_1 transforme les segments $[AB], [BC], [CA]$ respectivement en $[BC], [CA], [AB]$. La symétrie S_A transforme *ces derniers en $[CB],[BA],[AC]$ et par conséquent $S_A \circ R_1$ transforme $[AB],[BC],[CA]$ en $[CB],[BA],[AC]$ c'est à dire c'est la symétrie S_B.*

La symétrie S_B transforme les segments $[AB],[BC],[CA]$ respectivement en $[CB],[BA],[AC]$. La symétrie S_A transforme ces derniers en $[BC],[CA],[AB]$ et par conséquent $S_A \circ S_B$ transforme $[AB],[BC],[CA]$ en $[BC],[CA],[AB]$ c'est à dire c'est la rotation R_1.

$\circ$	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
Id	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	Id	S_C		
R_2	R_2	Id	R_1			
S_A	S_A	S_B		Id	R_1	
S_B	S_B				Id	
S_C	S_C					Id

On complète ensuite la table sans calculs en utilisant la règle suivante : sur la deuxième ligne par exemple les six composées $R_1 \circ Id, R_1 \circ R_1, R_1 \circ R_2, R_1 \circ S_A, R_1 \circ S_B, R_1 \circ S_C$ sont des transformations différentes deux à deux puisque R_1 est une bijection. De même sur chacune des autres lignes, et sur chaque colonne, les transformations sont différentes. Ceci permet de remplir la table :

$\circ$	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
Id	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	Id	S_C	S_A	S_B
R_2	R_2	Id	R_1	S_B	S_C	S_A
S_A	S_A	S_B	S_C	Id	R_1	R_2
S_B	S_B	S_C	S_A	R_2	Id	R_1
S_C	S_C	S_A	S_B	R_1	R_2	Id

Les quatre conditions à vérifier pour justifier que l'ensemble $G = \{Id, R_1, R_2, S_A, S_B, S_C\}$ est un groupe pour la loi de composition $\circ$:

- *La composée de deux éléments de G appartient à G : c'est vrai puisque les 36 éléments de la table appartiennent à G.*
- *La loi $\circ$ est associative : on ne le démontre pas puisque c'est fait dans le cours.*
- *Cette loi admet un élément neutre : on le sait d'après le cours, l'application Id est élément neutre en ce sens que $T \circ Id = Id \circ T = T$ pour toute transformation T. Cependant il ne faut pas oublier de dire que Id fait partie de l'ensemble G.*
- *Chaque élément de G admet un élément symétrique pour la loi $\circ$, et ce symétrique appartient à G :*

le symétrique de Id est Id parce que $Id \circ Id = Id$;

le symétrique de R_1 est R_2, et celui de R_2 est R_1, parce que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = Id$;

le symétrique de chaque symétrie S est S parce que $S \circ S = Id$.

b) Vérifier que les restrictions à $\{A, B, C\}$ de ces isométries forment le groupe des permutations de l'ensemble $\{A, B, C\}$.

Solution : Les six permutations des trois lettres ABC sont $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. Plus précisément les permutations de l'ensemble $\{A, B, C\}$ sont les bijections de cet ensemble sur lui-même, par exemple la permutation ACB est la bijection f définie par $f(A) = A, f(B) = C, f(C) = B$.

Les restrictions de $Id, R_1, R_2, S_A, S_B, S_C$ à l'ensemble $\{A, B, C\}$ sont aussi des bijections de cet ensemble sur lui-même :

Id transforme A, B, C en A, B, C respectivement ;

R_1 transforme A, B, C en B, C, A respectivement ;

R_2 transforme A, B, C en C, A, B respectivement ;

S_A transforme A, B, C en A, C, B respectivement ;

S_B transforme A, B, C en C, B, A respectivement ;

S_C transforme A, B, C en B, A, C respectivement.

On retrouve les six permutations de l'ensemble $\{A, B, C\}$.

***Exercice* 0.2** *Entiers modulo* 6

a) On notera $6\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de 6. Démontrer que c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (pour l'addition).

Solution : C'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ parce qu'il vérifie les quatre conditions :

• *La somme de deux multiples de 6 est multiple de 6 :* $6k + 6k' = 6(k + k')$.

• *La loi (ici c'est l'addition) est associative : c'est vrai pour tous les entiers donc c'est aussi vrai pour les multiples de* 6.

• *L'élément neutre de l'addition (c'est à dire* 0*) est un multiple de* 6 *(parce que* $0 = 6 \cdot 0$*).*

• *Le symétrique (pour l'addition) de chaque multiple de* 6 *est multiple de* 6 *: en effet le symétrique de* $6k$ *est* $-6k$ *puisque la somme des deux vaut* 0 *; et* $-6k$ *est multiple de* 6 *parce que c'est le produit de* 6 *par* $-k$.

b) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ on notera $\dot{a}$ l'ensemble des entiers $a + 6k$, où $k \in \mathbb{Z}$. Remplir la table d'addition (où on pose que $\dot{a}\dot{+}\dot{b} = \dot{c}$ si $a + b = c$ modulo 6 ; on choisira c dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). Démontrer que l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$ est un groupe commutatif pour la loi de composition $\dot{+}$. Ce groupe est noté $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Solution : On dit que deux entiers sont égaux modulo 6 *si leur différence est multiple de* 6*. Par exemple* $4 + 3 = 7$ *donc* $4 + 3 = 1$ *modulo* 6*, ce qu'on traduit par* $\dot{4}\dot{+}\dot{3} = \dot{1}$*. La loi est notée* $\dot{+}$ *parce qu'elle agit sur les ensembles* $\dot{a}$*, tandis que la loi* $+$ *agit sur les entiers* a*. En calculant tous les* $\dot{a}\dot{+}\dot{b}$ *on obtient la table de la loi* $\dot{+}$ *:*

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

$\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$ *est un groupe pour la loi* $\dot{+}$ *parce qu'il vérifie les quatre conditions :*

• *La somme de deux éléments de cet ensemble appartient à cet ensemble (c'est à dire les* 36 *éléments de la table valent* $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}$ *ou* $\dot{5}$*).*

• *La loi* $\dot{+}$ *est associative :* $(\dot{a}\dot{+}\dot{b})\dot{+}\dot{c}$ *est égal à* $\dot{a}\dot{+}(\dot{b}\dot{+}\dot{c})$ *parce que tous deux sont égaux à* $\dot{d}$*, avec* d *tel que* $a + b + c = d$ *modulo* 6.

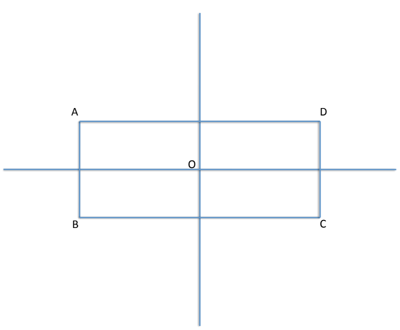
• *L'élément neutre de la loi* $\dot{+}$ *est* $\dot{0}$ *: on a bien* $\dot{a}\dot{+}\dot{0} = \dot{0}\dot{+}\dot{a} = \dot{a}$ *pour tout* $\dot{a}$ *;*

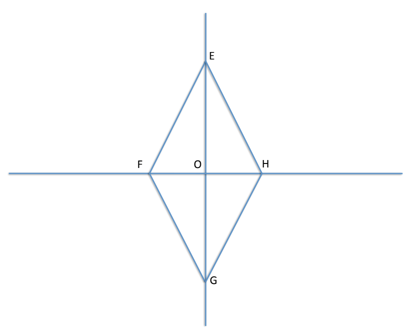
• *Le symétrique de* $\dot{0}$ *(pour la loi* $\dot{+}$*) est* $\dot{0}$*, celui de* $\dot{1}$ *est* $\dot{5}$ *(puisque* $\dot{1}\dot{+}\dot{5} = \dot{5}\dot{+}\dot{1} = \dot{0}$*), celui de* $\dot{2}$ *est* $\dot{4}$*, celui de* $\dot{3}$ *est* $\dot{3}$*, celui de* $\dot{4}$ *est* $\dot{2}$*, celui de* $\dot{5}$ *est* $\dot{1}$*, et chacun de ces symétriques appartient à l'ensemble* $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$.

C'est un groupe commutatif parce qu'il vérifie ces quatre condition plus une cinquième :

• $\dot{a}\dot{+}\dot{b} = \dot{b}\dot{+}\dot{a}$ *pour tout* $\dot{a}$ *et* $\dot{b}$ *dans l'ensemble* $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$.

***Exercice* 0.3** a) Vérifier que les isométries qui conservent le rectangle $ABCD$ sont les mêmes que celles qui conservent le losange $EFGH$.





Solution : Ce rectangle et ce losange étant supposés non carrés, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ *les transforme en un autre rectangle et un autre losange. Par contre la rotation d'angle* π *les conserve puisqu'elle transforme le segment* $[AB]$ *en* $[CD]$*,* $[BC]$ *en* $[DA]$*,* $[EF]$ *en* $[GH]$*,* $[FG]$ *en* $[HE]$ *et inversement. Les seuls axes de symétrie de ces deux figures sont l'axe des* x *et l'axe des* y.

b) Remplir leur table de composition.

Solution : En appelant Id *l'identité,* R *la rotation d'angle* π *(appelée aussi symétrie par rapport à* O*),* S_x *la symétrie par rapport à l'axe des* x *et* S_y *la symétrie par rapport à l'axe des* y*, on a la table de composition suivante (on remplit d'abord la première ligne et la première colonne, puis on place les trois composées* $R \circ R = S_x \circ S_x = S_y \circ S_y = Id$*, puis on complète en faisant en sorte qu'il n'y ait jamais deux fois le même élément sur une même ligne ni sur une même colonne) :*

$\circ$	Id	R	S_x	S_y
Id	Id	R	S_x	S_y
R	R	Id	S_y	S_x
S_x	S_x	S_y	Id	R
S_y	S_y	S_x	R	Id

b) Vérifier que les restrictions à $\{A, B, C, D\}$ (ou à $\{E, F, G, H\}$) de ces isométries forment un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ (ou de l'ensemble $\{E, F, G, H\}$).

Solution : Les isométries sont des injections c'est à dire elles transforment deux points différents en deux points différents. Quand on les fait agir uniquement sur les points A, B, C, D (ou sur les points E, F, G, H), les isométries de la question a) transforment A, B, C, D en quatre points, ces quatre points sont aussi A, B, C, D mais dans un ordre différent (on obtient C, D, A, B par la rotation d'angle π, B, A, D, C par la symétrie S_x et D, C, B, A par la symétrie S_y). Ce sont donc des bijections de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ sur lui-même, c'est à dire des permutations de $\{A, B, C, D\}$ (et de même pour $\{E, F, G, H\}$).

Cependant il y a 24 permutations de quatre éléments ($24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$). C'est donc un sous-ensemble strict de l'ensemble des permutations de $\{A, B, C, D\}$, et l'énoncé demande de vérifier que ce sous-ensemble est un groupe :

• *La loi $\circ$ est interne, c'est à dire la composée de deux éléments de $\{Id, R, S_x, S_y\}$ appartient à $\{Id, R, S_x, S_y\}$, puisque les 16 éléments de la table appartiennent à $\{Id, R, S_x, S_y\}$.*

• *La loi $\circ$ est associative : on ne le démontre pas puisque c'est fait dans le cours.*

• *Cette loi admet un élément neutre : on sait déjà d'après le cours que Id est élément neutre c'est à dire $T \circ Id = Id \circ T = T$, et on remarque que Id appartient à l'ensemble $\{Id, R, S_x, S_y\}$.*

• *Chaque élément de G admet un élément symétrique pour la loi $\circ$:*

le symétrique de Id est Id parce que $Id \circ Id = Id$;

le symétrique de R est R ($R \circ R = Id$) ;

le symétrique de S_x est S_x ($S_x \circ S_x = Id$) ;

le symétrique de S_y est S_y ($S_y \circ S_y = Id$).

***Exercice* 0.4** On considère quatre applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, définies par

$$f_0(x) = x, \quad f_1(x) = -x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x}.$$

a) Remplir leur table de composition et vérifier qu'elles forment un groupe.

Solution : Il faut calculer les 16 applications composées. Par exemple $f_1\big(f_2(x)\big) = f_1\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = f_3(x)$.

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_0	f_3	f_2
f_2	f_2	f_3	f_0	f_1
f_3	f_3	f_2	f_1	f_0

$\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ forme un groupe parce que

• *les 16 composées qu'on a calculées appartiennent à $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$;*

• *la composition des applications (d'un ensemble dans lui-même) est associative ;*

• *l'élément neutre appartient à $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$: c'est f_0 ;*

• *l'élément symétrique de chaque f_k est f_k puisque $f_k \circ f_k$ est égal à l'élément neutre d'après la table.*

b) Comparer ce groupe à celui de l'exercice 3.

Solution : Par exemple les f_1 de cette table de composition sont situés aux mêmes emplacements que les R de celle de l'exercice 3 :

$\circ$		f_1		
		f_1		
f_1	f_1			
				f_1
			f_1	

$\circ$		R		
		R		
R	R			
				R
			R	

De même, les f_0 sont situés aux mêmes emplacements que les Id, les f_2 aux mêmes emplacements que les S_x, et les f_3 aux mêmes emplacements que les S_y. La structure de ces deux groupes est donc la même.

***Exercice* 0.5** On suppose que deux éléments a et b d'un groupe G vérifient $ab^2 = b^3a$ et $ba^2 = a^3b$.

a) Montrer, en utilisant seulement la première égalité, que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ et $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.

b) En déduire, en utilisant la deuxième égalité, que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que a et b sont égaux à l'élément neutre de G.

Solution : Dans cet exercice G est un groupe quelconque, sa loi de composition est aussi une loi quelconque. La composée de x par y est notée xy par commodité, au lieu de $x * y$. Remarquons d'abord que l'égalité $ab^2 = b^3a$ (avec a et b différents de l'élément neutre) n'est pas possible dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$: par commutativité on déduirait de cette égalité $ab^2 = ab^3$ et par conséquent $1 = b$. Par contre elle est possible dans le groupe non commutatif des isométries : si a est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$ et si b est la translation de vecteur $(1,0)$ on a bien $ab^2 = b^3a$, c'est à dire $a \circ b \circ b = b \circ b \circ b \circ a$.

Il s'agit donc de résoudre cet exercice sans utiliser la commutativité, c'est à dire sans jamais remplacer xy par yx. On utilise par contre les propriétés du groupe (associativité, élément neutre, éléments symétriques).

Calculons b^9a^2 de deux façons différentes.

$$\begin{aligned}
b^9a^2 &= b^6(b^3a)a \\
&= b^6(ab^2)a \\
&= b^3(b^3a)b^2a \\
&= b^3(ab^2)b^2a \\
&= (b^3a)b^4a \\
&= (ab^2)b^4a \\
&= ab^6a \\
&= ab^3(b^3a) \\
&= ab^3(ab^2) \\
&= a(b^3a)b^2 \\
&= a(ab^2)b^2 \\
&= a^2b^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^9a^2 &= b^8(ba^2) \\
&= b^8(a^3b) \\
&= b^7(ba^2)ab \\
&= b^7(a^3b)ab \\
&= b^6(ba^2)(ab)^2 \\
&= b^6(a^3b)(ab)^2 \\
&= b^5(ba^2)(ab)^3 \\
&= b^5(a^3b)(ab)^3 \\
&= \ldots \\
&= (a^3b)(ab)^8 \\
&= a^2(ab)^9.
\end{aligned}$$

On a donc $a^2b^4 = a^2(ab)^9$, on en déduit $b^4 = (ab)^9$. On peut refaire les mêmes calcule en remplaçant a par b et b par a : on obtient $a^4 = (ba)^9$, d'où on déduit $a^5 = a(ba)^9 = (ab)^9a$ mais, comme on a vu que $(ab)^9 = b^4$, on en déduit $a^5 = b^4a$ et (en multipliant par a^{-1}) on obtient $a^4 = b^4$.

Utilisons $ab^4 = (ab^2)b^2 = b^3ab^2 = b^3(b^3a) = b^2(b^4a)$. En remplaçant b^4 par a^4 on en déduit $a^5 = b^2a^5$ d'où $a^5a^{-5} = b^2a^5a^{-5}$, ce qui fait $b^2 = e$ (élément neutre). On utilise maintenant $ab^2 = b^3a = b(b^2a)$, où on remplace b^2 par e ; on obtient $a = ba$ d'où $aa^{-1} = baa^{-1}$ c'est à dire $e = b$. L'égalité $ba^2 = a^3b$, où on remplace b par e, implique $a^2 = a^3$ d'où $e = a$.

On a donc démontré $\boxed{a = b = e}$*. Les égalités demandées aux questions a) et b) s'en déduisent : compte tenu que* $e^{-1} = e$ *et* $e^n = e$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $a^2b^8a^{-2} = b^{18} = a^3b^8a^{-3} = b^{27} = b^{18} = e$*.*

***Exercice* 0.6** Montrer que les applications suivantes sont des homomorphismes entre deux groupes G_1 et G_2 qu'on précisera :

$f(x) = \ln x$,

$g(z) = |z|$,

$h(x) = \sqrt{x}$,

$k(z) = e^z$,

$\ell(z) = \bar{z}$.

Solution : $f_1 = \ln$ *est une application de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$ *et elle vérifie la relation* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*, donc c'est un homomorphisme du groupe multiplicatif* $\mathbb{R}_+^*$ *dans le groupe additif* $\mathbb{R}$*.*

De même, sachant que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$*, et sachant que* $\mathbb{R}^*$ *est un groupe pour la multiplication, on en déduit que* g *est un homomorphisme du groupe multiplicatif* $\mathbb{R}^*$ *dans le groupe multiplicatif* $\mathbb{R}^*$*.*

$h(x) = \sqrt{x}$ *n'est défini que pour* $x \in \mathbb{R}^+$*. C'est un homomorphisme du groupe multiplicatif* $\mathbb{R}_+^*$ *dans le groupe multiplicatif* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Sachant que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$*,* k *est un homomorphisme du groupe additif* $\mathbb{C}$ *dans le groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$*.*

Sachant que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$*,* ℓ *est un homomorphisme du groupe additif* $\mathbb{C}$ *dans le groupe additif* $\mathbb{C}$*. Sachant que* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$*,* ℓ *est un homomorphisme du groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$ *dans le groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$*.*