Corrigé de l'exercice 7 planche 1

IMPLICATIONS ET ÉQUIVALENCES

Question 1. À démontrer: $0 \leq \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^2 \leq \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq 0$.

Les inégalités $0 \leq \alpha \leq \beta$ impliquent $\alpha^2 \leq \beta^2$ parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante pour $x \geq 0$. Réciproquement l'inégalité $\alpha^2 \leq \beta^2$ n'implique pas $0 \leq \alpha \leq \beta$ puisque des nombres strictement négatifs peuvent vérifier $\alpha^2 \leq \beta^2$.

L'inégalité $\alpha^2 \leq \beta^2$ est équivalente à $\alpha^2 - \beta^2 \leq 0$, et $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$. Les inégalités $\alpha^2 \leq \beta^2$ et $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq 0$ sont donc équivalentes.

Question 2. À démontrer: $0 \leq \alpha \leq \beta \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta} \Rightarrow \alpha \leq \beta$.

On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante pour $x \geq 0$. Les couples de réels (α, β) qui vérifient les inégalités $0 \leq \alpha \leq \beta$ sont donc les mêmes que ceux qui vérifient $0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$ (avec, sous-entendu, $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$ définis).

Ces couples de réels vérifient tous l'inégalité $\alpha \leq \beta$. Mais parmi les couples de réels qui vérifient $\alpha \leq \beta$, il y en a qui ne vérifient pas $0 \leq \alpha \leq \beta$. Ils ne vérifient pas non plus $0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$ puisque c'est équivalent. On a donc l'implication $0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta} \Rightarrow \alpha \leq \beta$ mais pas l'équivalence.

Question 3. À démontrer: $\ln \alpha = \ln \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

On sait que la fonction $x \mapsto \ln x$ est définie pour $x > 0$ et injective, c'est à dire les couples de réels (α, β) qui vérifient $\ln \alpha = \ln \beta$ vérifient tous $\alpha = \beta$. Mais parmi les couples de réels qui vérifient $\alpha = \beta$ il y en a des négatifs, pour lesquels $\ln \alpha$ et $\ln \beta$ ne sont pas définis. C'est pourquoi l'égalité $\ln \alpha = \ln \beta$ implique l'égalité $\alpha = \beta$ mais ne lui est pas équivalente.

Question 4. À démontrer: la proposition " f croissante sur $\mathbb{R}$ " n'implique pas, et n'est pas impliquée, par la proposition " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ " (c'est à dire il faut trouver un contre-exemple pour chacune de ces deux implications).

On sait que la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante pour $x \in \mathbb{R}$, et strictement positive. Donc $x \mapsto \frac{1}{e^x}$ est strictement décroissante pour $x \in \mathbb{R}$, et $x \mapsto -\frac{1}{e^x}$ strictement croissante pour $x \in \mathbb{R}$.

Cependant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right)$ vaut 0 et pas $+\infty$.

Quant à la fonction $x \mapsto x^2$, elle vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ mais elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est strictement décroissante pour $x \in]-\infty; 0]$.