

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 4

Exercice 1 Soit l'équation différentielle

$$(E) : xy' + 2y = x^2.$$

a) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \alpha x^2$ (avec α constante).

Réponse : $x(\alpha x^2)' + 2\alpha x^2 = x^2 \Leftrightarrow x(2\alpha x) + 2\alpha x^2 = x^2$, ce qui fait $4\alpha x^2 = x^2$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{4}$. La solution particulière

est donc $y_p(x) = \frac{x^2}{4}$.

b) Résoudre l'équation sans second membre $xy' + 2y = 0$ et en déduire toutes les solutions de (E).

Réponse : D'après le théorème, la solution générale de $xy' + 2y = 0$ est

$$y_h(x) = Ce^{\int (-\frac{2}{x}) dx} = Ce^{-2 \ln |x|} = Ce^{\ln(|x|^{-2})} = C|x|^{-2} \quad \text{avec } C \text{ constante.}$$

Compte tenu que $|x|^{-2} = (\pm x)^{-2} = x^{-2}$, la solution générale de $xy' + 2y = 0$ est $y_h(x) = \frac{C}{x^2}$. La solution générale de

$xy' + 2y = x^2$ est $y = y_p + y_h$ c'est à dire $y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$.

Exercice 2 Soit l'équation différentielle

$$(E) : xy' - 2y = x^2.$$

a) Résoudre l'équation sans second membre $xy' - 2y = 0$.

Réponse : D'après le théorème, la solution générale de $xy' - 2y = 0$ est $y_h(x) = Ce^{\int (\frac{2}{x}) dx} = Ce^{2 \ln |x|} = Ce^{\ln(|x|^2)} = C|x|^2$ avec C constante. Compte tenu que $|x|^2 = (\pm x)^2 = x^2$, la solution générale de $xy' - 2y = 0$ est $y_h(x) = Cx^2$.

b) Résoudre (E) par la méthode de variation de la constante.

Réponse : On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = C(x)x^2$, c'est à dire cette solution a la même forme que la solution de l'équation sans second membre mais cette fois $C(x)$ est une fonction. On a donc

$$x(C(x)x^2)' - 2C(x)x^2 = x^2, \text{ ce qui fait}$$

$$x(C'(x)x^2 + C(x)2x) - 2C(x)x^2 = x^2$$

$$C'(x)x^3 + 2C(x)x^2 - 2C(x)x^2 = x^2$$

$$C'(x)x^3 = x^2, \text{ d'où } C'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } C(x) = \ln |x|.$$

La solution particulière est donc $y_p(x) = x^2 \ln |x|$ et la solution générale $y(x) = x^2 \ln |x| + Cx^2$ (avec C constante).

Exercice 3 Soit l'équation différentielle

$$(E) : y' - 2xy = x.$$

a) Trouver une solution particulière de (E) sous forme d'une fonction constante.

Réponse : Si y est constante sa dérivée est nulle. L'équation $y' - 2xy = x$ devient $-2xy = x$ ce qui fait $y = -\frac{1}{2}$.

b) Résoudre l'équation sans second membre $y' - 2xy = 0$ et en déduire toutes les solutions de (E).

Réponse : Comme une primitive de $2x$ est x^2 , le théorème donne comme solution générale de l'équation sans second

membre $y_h(x) = Ce^{x^2}$ avec C constante. Quant à la solution générale de (E) c'est $y(x) = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$.

c) Parmi ces solutions en trouver une qui vérifie $y(0) = 0$.

Réponse : $y(0) = 0$ équivaut à $y(x) = -\frac{1}{2} + Ce^0 = 0$ ce qui fait $C = \frac{1}{2}$. La solution demandée est donc $y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = x^2 + 3x.$$

a) Trouver une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme du second degré $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Réponse : On a $(y_p)'(x) = 2x + \beta$. Donc y_p vérifie l'équation (E) si et seulement si

$$2x + \beta + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + 3x$$

$$\alpha x^2 + (2 + \beta)x + \beta + \gamma = x^2 + 3x \text{ (pour tout } x \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ce qui fait } \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2 + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

$$\text{D'où on tire } \alpha = \beta = 1, \gamma = -1 \text{ et } \boxed{y_p(x) = x^2 + x - 1}.$$

b) Résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$ et en déduire toutes les solutions de (E) .

Réponse : La solution générale est $\boxed{y_h(x) = Ce^{-x}}$ pour l'équation sans second membre, et $\boxed{y(x) = x^2 + x - 1 + Ce^{-x}}$ pour l'équation (E) , où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

c) Parmi ces solutions en trouver une qui vérifie $y(0) = 1$.

$$\text{Réponse : } y(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + Ce^0 = 1, \text{ ce qui fait } C = 2 \text{ et } \boxed{y(x) = x^2 + x - 1 + 2e^{-x}}.$$

Exercice 5 Soit l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^x.$$

a) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \alpha e^x$ (avec α constante).

Réponse : On a $(y_p)'(x) = \alpha e^x$. Donc y_p vérifie l'équation (E) si et seulement si $2\alpha e^x = e^x$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{2}$ ce qui fait

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{2}e^x}.$$

b) Résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$ et en déduire toutes les solutions de (E) .

Réponse : La solution générale est $\boxed{y_h(x) = Ce^{-x}}$ pour l'équation sans second membre, et $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}$ pour l'équation (E) , où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exercice 6 Soit l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = \cos x.$$

a) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ (avec α et β constantes).

Réponse : On a $(y_p)'(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$. Donc y_p vérifie l'équation (E) si et seulement si

$$-\alpha \sin x + \beta \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x = \cos x$$

$$(\alpha + \beta) \cos x + (-\alpha + \beta) \sin x = \cos x \text{ (pour tout } x \in \mathbb{R})$$

$$\text{d'où le système } \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

$$\text{La solution de ce système étant } \alpha = \beta = \frac{1}{2}, \text{ on a } \boxed{y_p(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)}.$$

b) Résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$ et en déduire toutes les solutions de (E) .

Réponse : La solution générale est $\boxed{y_h(x) = Ce^{-x}}$ pour l'équation sans second membre, et $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ce^{-x}}$ pour l'équation (E) , où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exercice 7 Résoudre l'équation différentielle $y' \cos x + y \sin x = 1$ par la méthode de variation de la constante.

Réponse : La solution générale de l'équation sans second membre $y' \cos x + y \sin x = 0$ est $y_h(x) = Ce^{\int (-\frac{\sin x}{\cos x}) dx}$. La fonction $\frac{-\sin x}{\cos x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos x$, elle admet donc comme primitive $\ln|u| = \ln|\cos x|$ et par conséquent $y_h(x) = Ce^{\ln|\cos x|} = C|\cos x|$. En remplaçant C par $-C$ dans les intervalles où $\cos x$ est négatif on a $y_h(x) = C \cos x$.

Par la méthode de variation de la constante, on cherche une fonction $C(x)$ telle que la fonction $y_p(x) = C(x) \cos x$ soit solution de (E) . On a

$$(C(x) \cos x)' \cos x + (C(x) \cos x) \sin x = 1$$

$$(C'(x) \cos x - C(x) \sin x) \cos x + (C(x) \cos x) \sin x = 1$$

$$C'(x) \cos^2 x = 1 \text{ d'où } C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On sait que la dérivée de $\tan x$ est $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Donc la fonction $C(x) = \tan x$ convient, et une solution particulière de (E) est $y_p(x) = C(x) \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cos x = \sin x$. La solution générale est $y(x) = \sin x + C \cos x$ avec C constante.

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

$$y'' - y' + y = 0.$$

Réponse : On applique le théorème sur les équations différentielles du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ ayant pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ ayant pour racine double $r = 1$, la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ est $y(x) = \lambda e^x + \mu x e^x$.

Le polynôme $X^2 - X + 1$ ayant pour racines $r_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, la solution générale de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$ est $y(x) = e^{\frac{1}{2}x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$.

Exercice 9 On veut résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 2y' + y = \cos x.$$

Trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ (avec α et β constantes) et en déduire toutes les solutions de (E).

Réponse : La dérivée seconde de $y_p(x)$ est $-\alpha \cos x - \beta \sin x$ donc $(y_p)'' + y_p$ est nul. L'équation différentielle (en remplaçant y par y_p) équivaut donc à $-2(y_p)' = \cos x$ c'est à dire $2\alpha \sin x - 2\beta \cos x = \cos x$ ce qui fait $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$ et

$y_p(x) = -\frac{1}{2} \sin x$. On obtient la solution générale de (E) en ajoutant la solution de $y'' - 2y' + y = 0$ qu'on a trouvée à

l'exercice précédent : $y(x) = -\frac{1}{2} \sin x + \lambda e^x + \mu x e^x$.

Exercice 10 On veut résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = \alpha x e^x$ (avec α constante) et en déduire toutes les solutions de (E).

Réponse : Il faut trouver α tel que $(\alpha x e^x)'' - 3(\alpha x e^x)' + \alpha x e^x = e^x$. On calcule $(\alpha x e^x)' = \alpha(e^x + x e^x)$ et $(\alpha x e^x)'' = \alpha(e^x + x e^x)' = \alpha(2e^x + x e^x)$; on a donc

$$\alpha(2e^x + x e^x)'' - 3\alpha(e^x + x e^x)' + 2\alpha x e^x = e^x$$

$$(2\alpha - 3\alpha)e^x + (\alpha - 3\alpha + 2\alpha)x e^x = e^x$$

$-\alpha e^x = e^x$, d'où $\alpha = -1$ et $y_p(x) = -x e^x$. On obtient la solution générale de (E) en ajoutant la solution de $y'' - 3y' + 2y = 0$

qu'on a trouvée à l'exercice précédent : $y(x) = -x e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x}$.