

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 6

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Réponse : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 21 & 6 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2\lambda \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$, où λ est un nombre (réel ou complexe).

a) Calculer les matrices AB et BA .

Réponse : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8+6\lambda & 16+12\lambda \\ -4-3\lambda & -8-6\lambda \end{pmatrix}$.

b) Trouver une matrice B telle que $AB = BA = 0$ (matrice nulle).

Réponse : Comme AB est nulle et $BA = (4+3\lambda) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, la condition pour que ces matrices soient nulles est $4+3\lambda = 0$ c'est à dire $\lambda = -\frac{4}{3}$. La réponse est $B = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{8}{3} \\ -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et λ un nombre (réel ou complexe). On rappelle que par définition

$$\det A = ad - bc \text{ (déterminant de } A),$$

$$\text{tr } A = a + d \text{ (trace de } A).$$

a) Vérifier les formules

$$AI = IA = A,$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A,$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A,$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \text{ (ce polynôme s'appelle polynôme caractéristique de } A),$$

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0 \text{ (cette formule s'appelle théorème de Cayley-Hamilton).}$$

Réponse : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \text{ et } \det(\lambda A) = \lambda a \lambda d - \lambda b \lambda c = \lambda^2(ad - bc) = \lambda^2 \det A.$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda a + \lambda d = \lambda(a + d) = \lambda \text{tr } A.$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = ad - a\lambda - \lambda d + \lambda^2 - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

b) Si $ad - bc \neq 0$, vérifier que la matrice $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (qu'on appellera A^{-1}) est l'inverse de A , c'est à dire vérifier

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Réponse : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

a) Vérifier les formules

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B,$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Réponse : $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$ et $\text{tr}(A+B) = (a+a') + (d+d') = (a+d) + (a'+d') = \text{tr} A + \text{tr} B$.

$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$ ont même trace : $\text{tr}(AB) = (aa' + bc') + (cb' + dd')$ est égal à $(aa' + cb') + (bc' + dd')$ c'est à dire $\text{tr}(BA)$.

b) En général on a $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ et $\text{tr}(AB) \neq (\text{tr} A)(\text{tr} B)$. Vérifier ces inégalités dans le cas $B = A$, puis dans le cas $B = -A$, en supposant dans les deux cas $\det A \neq 0$.

Réponse : Dans le cas $B = A$, $\det(A+B) = \det(2A)$ est égal à $4\det A$ d'après l'exercice 3, tandis que $\det A + \det B$ est égal à $2\det A$.

D'autre part $\text{tr}(AB)$ qu'on a calculé à la question a) vaut $a^2 + 2bc + d^2$ dans le cas $B = A$, tandis que $(\text{tr} A)(\text{tr} B)$ vaut $(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$.

Dans le cas $B = -A$, $A+B=0$ (matrice nulle) a pour déterminant 0, tandis que $\det A + \det B = (ad-bc) + ((-a)(-d) - (-b)(-c))$ est égal à $2\det A$ (vu que $(-a)(-d) = ad$ et $(-b)(-c) = bc$).

D'autre part $\text{tr}(AB)$ qu'on a calculé à la question a) vaut $a(-a) + b(-c) + c(-b) + d(-d) = -a^2 - 2bc - d^2$ dans le cas $B = -A$, tandis que $(\text{tr} A)(\text{tr} B)$ vaut $(a+d)(-a-d) = -(a+d)^2 = -a^2 - 2ad - d^2$.

Exercice 5 Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) On suppose que ses deux vecteurs-colonnes sont colinéaires, c'est à dire il existe un nombre λ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ou un nombre μ tel que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Vérifier que $\det A = 0$.

Réponse : Dans le premier cas $A = \begin{pmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\lambda bd - b\lambda d = 0$. Dans le deuxième cas $A = \begin{pmatrix} a & \mu a \\ c & \mu c \end{pmatrix}$ a pour déterminant $a\mu c - \mu ac = 0$.

b) Réciproquement on suppose $\det A = 0$, trouver λ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ou μ tel que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.

Réponse : Si $\det A = 0$ c'est que $ad = bc$ donc $a = \frac{b}{d}c$ (sauf dans le cas $d = 0$). On a donc bien $a = \lambda c$ avec $\lambda = \frac{b}{d}$. L'égalité $b = \lambda d$ est évidente : $b = \frac{b}{d}d$. On conclut que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Il reste le cas $d = 0$: comme on a supposé $ad = bc$ on a $bc = 0$ d'où encore deux cas : $b = 0$, ou $c = 0$ (avec $b \neq 0$). Dans le cas $b = 0$ la colonne $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est nulle, il suffit de choisir $\mu = 0$ pour avoir $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Dans le cas $c = 0$ avec $b \neq 0$, compte tenu que $d = 0$ on a $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{a}{b}$.

Exercice 6 Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; on lui associe la transformation T du plan qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, trouver une relation entre les affixes de M et de M' ; en déduire quelle est la transformation T .

Réponse : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$. Les coordonnées de M' sont donc $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ et $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$, et son affixe $z' = x' + iy' = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$. On a aussi $z' = (x \cos \theta + iy \cos \theta) + (ix \sin \theta - y \sin \theta)$ ce qui fait $z' = (x + iy) \cos \theta + (ix - y) \sin \theta = z \cos \theta + iz \sin \theta$ (avec $z = x + iy$ affixe de M). On a finalement $z' = (\cos \theta + i \sin \theta)z = e^{i\theta}z$, ce qui prouve que M' est le transformé de M par la rotation de centre O et d'angle θ .

b) Mêmes questions si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réponse : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. Les coordonnées de M' sont donc $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$, et son affixe $z' = x' + iy' = \lambda(x + iy) = \lambda z$ (avec $z = x + iy$ affixe de M), ce qui prouve que M' est le transformé de M par l'homothétie de centre O et de rapport λ .