MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 9

***Exercice* 1** Soient f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et g une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, définies par

$$f(V)=\begin{pmatrix} x+y\\ y+z\\ z+x\end{pmatrix} \text{ pour tout } V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

$$g(W)=\begin{pmatrix} x+y\\ y+z\\ z+t\\ t+x\end{pmatrix} \text{ pour tout } W=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.$$

a) Vérifier que f est linéaire, c'est à dire vérifier les relations $f(V_1+V_2)=f(V_1)+f(V_2)$ et $f(\lambda V)=\lambda f(V)$. Faire de même pour g.

Réponse : Pour tout $V_1=\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$ on a

$$V_1+V_2=\begin{pmatrix} x_1+x_2\\ y_1+y_2\\ z_1+z_2\end{pmatrix},$$

$$f(V_1+V_2)=\begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2\\ y_1+y_2+z_1+z_2\\ z_1+z_2+x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1\\ y_1+z_1\\ z_1+x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2+y_2\\ y_2+z_2\\ z_2+x_2\end{pmatrix}=f(V_1)+f(V_2).$$

Pour tout $V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a

$$\lambda V=\begin{pmatrix} \lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix},$$

$$f(\lambda V)=\begin{pmatrix} \lambda x+\lambda y\\ \lambda y+\lambda z\\ \lambda z+\lambda x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x+y\\ y+z\\ z+x\end{pmatrix}=\lambda f(V).$$

Pour tout $W_1=\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\\ t_1\end{pmatrix}$ et $W_2=\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\\ t_2\end{pmatrix}$ on a

$$W_1+W_2=\begin{pmatrix} x_1+x_2\\ y_1+y_2\\ z_1+z_2\\ t_1+t_2\end{pmatrix},$$

$$g(W_1+W_2)=\begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2\\ y_1+y_2+z_1+z_2\\ z_1+z_2+t_1+t_2\\ t_1+t_2+x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1\\ y_1+z_1\\ z_1+t_1\\ t_1+x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2+y_2\\ y_2+z_2\\ z_2+t_2\\ t_2+x_2\end{pmatrix}=g(W_1)+g(W_2).$$

Pour tout $W=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a

$$\lambda W=\begin{pmatrix} \lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\\ \lambda t\end{pmatrix},$$

$$g(\lambda W)=\begin{pmatrix} \lambda x+\lambda y\\ \lambda y+\lambda z\\ \lambda z+\lambda t\\ \lambda t+\lambda x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x+y\\ y+z\\ z+t\\ t+x\end{pmatrix}=\lambda g(W).$$

b) Déterminer une base du noyau de f, c'est à dire une base de l'ensemble des vecteurs $V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tels que $f(V)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Faire de même pour g.

Réponse : $f(V)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ est équivalent à $\begin{cases} x+y=0\\ y+z=0\\ z+x=0\end{cases}$. La première équation donne $y=-x$, la deuxième $z=-y=x$, la troisième $x+x=0$ (parce que $z=x$). On a donc $x=0$, d'où on déduit $y=0$ et $z=0$. Ceci prouve que le seul élément du noyau de f est le vecteur $V=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Le noyau de f n'a pas de base.

$g(W)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ est équivalent à $\begin{cases} x+y=0\\ y+z=0\\ z+t=0\\ t+x=0\end{cases}$. La première équation donne $y=-x$, la deuxième $z=-y=x$, la troisième $t=-z=-x$, la quatrième donne également $t=-x$. Le noyau de g est donc l'ensemble des vecteurs $W=\begin{pmatrix} x\\ -x\\ x\\ -x\end{pmatrix}$. Quant au vecteur de base du noyau, c'est $\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ puisque

$$\begin{pmatrix} x\\ -x\\ x\\ -x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

c) Déterminer une base de l'image de f, c'est à dire de l'ensemble des $f(V)$ quand V varie dans $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de l'image de g.

Réponse : Les $f(V)$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de trois vecteurs fixes :

$$\begin{aligned} f(V) &= \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par conséquent ces trois vecteurs forment une famille génératrice de l'ensemble des $f(V)$, c'est à dire de Imf.

Pour démontrer que c'est une base de Imf il reste à vérifier qu'ils sont linéairement indépendants : soient x, y, z trois réels tels que $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on a donc $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$; on a vu que ce système d'équations a comme solution unique $x=y=z=0$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont donc linéairement indépendants et forment une base de Imf.

Les $g(W)$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de quatre vecteurs fixes :

$$\begin{aligned} g(W) &= \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par conséquent les quatre vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de l'ensemble des $g(W)$, c'est à dire de Img.

Comme le quatrième vecteur est égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, les trois premiers vecteurs forment également une famille génératrice de Img. Pour démontrer que c'est une base de Img il reste à vérifier qu'ils sont linéairement indépendants : soient x, y, z trois réels tels que $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on a donc $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases}$ et par conséquent $x=y=z=0$. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont donc linéairement indépendants et forment une base de Img.

***Exercice* 2** On appelle e_1, e_2, e_3 les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f une application linéaire qui vérifie $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = e_3 + e_1$. Calculer $f(V)$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Réponse : Tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \end{aligned}$$

et pour toute application linéaire f on a

$$\begin{aligned} f(V) &= f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3). \end{aligned}$$

Pour l'application f de l'énoncé,

$$\begin{aligned} f(V) &= x(e_1 + e_2) + y(e_2 + e_3) + z(e_3 + e_1) \\ &= (x+z)e_1 + (x+y)e_2 + (y+z)e_3 \\ &= \begin{pmatrix} x+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y+z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

***Exercice* 3** Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(V) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ ax-y \end{pmatrix} \text{ pour tout } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

où a est un réel fixé. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.

Réponse : Le noyau de f, noté Ker$f$, est l'ensemble des vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $f(V)$ soit nul. Dans cet exercice c'est donc l'ensemble des V tels que $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ ax - y = 0 \end{cases}$. D'après la deuxième équation $y = ax$; d'après la première $2x + ax = 0$, ce qui fait $(2 + a)x = 0$ et permet de conclure que $x = 0$ et $y = 0$ sauf dans le cas $a = -2$. Dans le cas $a = -2$ tous les réels x vérifient $(2 + a)x = 0 \cdot x = 0$.

On a prouvé que

Ker$f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ si $a \neq -2$,

Ker$f$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) si $a \neq -2$,

autrement dit dans ce cas Ker$f$ est l'ensemble des $x \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et sa base est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}$.

L'image de f, notée Imf, est l'ensemble des $f(V)$. Dans cet exercice c'est l'ensemble des $f(V) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ ax - y \end{pmatrix}$ quand a est fixé et x varie dans $\mathbb{R}$, mais il faut donner une réponse plus précise de façon à voir quel sous-ensemble du plan il représente. On a

$$\begin{aligned} f(V) &= \begin{pmatrix} 2x \\ ax \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $a \neq -2$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc linéairement indépendants ; ils forment une base de Imf et par conséquent Imf est de dimension 2 (sa représentation géométrique est un plan). Mais Imf est inclus dans $\mathbb{R}^2$ qui est également de dimension 2, donc Im$f = \mathbb{R}^2$.

Si $a = -2$ on a $f(V) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -2x - y \end{pmatrix} = (2x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui fait que Im$f$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (représenté géométriquement par la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

On appelle rang de f la dimension de Imf, c'est à dire le nombre de vecteurs qu'il y a dans la base de Imf. Dans cet exercice le rang de f est 2 si $a \neq -2$ (il y a deux vecteurs de base, par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$), et le rang de f est 1 si $a = -2$ (le seul vecteur de base est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

***Exercice* 4** a) Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(V) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 4y - 2x \end{pmatrix} \text{ pour tout } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calculer $f(f(V)) - f(V)$.

Réponse : En appellant $V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le vecteur $f(V)$ on a

$$\begin{aligned} f(f(V)) - f(V) &= f(V') - f(V) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x' - 2y' \\ 4y' - 2x' \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 4y - 2x \end{pmatrix} \qquad (*) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x' - 2y' - x + 2y \\ 4y' - 2x' - 4y + 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Compte tenu que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 4y - 2x \end{pmatrix}$ on a $x' = \frac{1}{5}(x - 2y)$ et $y' = \frac{1}{5}(4y - 2x)$. On déduit de $(*)$

$$f(f(V)) - f(V) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(x - 2y - 8y + 4x) - x + 2y \\ \frac{1}{5}(16y - 8x - 2x + 4y) - 4y + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) En déduire que l'application g définie par $g(V) = 2f(V) - V$ est involutive c'est à dire $g(g(V)) = V$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Réponse : En posant $V' = g(V)$ on a

$$\begin{aligned} g(g(V)) = g(V') &= 2f(V') - V' \\ &= 2f(g(V)) - g(V) \qquad (**) \\ &= 2f(2f(V) - V) - 2f(V) + V. \end{aligned}$$

L'application f est linéaire (même vérifications qu'à l'exercice 1), ce qui permet de remplacer $f(2f(V) - V)$ par $f(2f(V)) + f(-V)$ et par $2f(f(V)) - f(V)$, et aussi par $2f(V) - f(V) = f(V)$ puisque d'après la question précédente $f(f(V)) = f(V)$. Donc en remplaçant $f(2f(V) - V)$ par $f(V)$ dans $(**)$ on obtient $g(g(V)) = 2f(V) - 2f(V) + V = V$.

***Exercice* 5** Une matrice $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ vérifie $aA^3 + bA^2 + cA + dI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre réels et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose $d \neq 0$, démontrer que le déterminant de A n'est pas nul *(indication : calculer d'abord le déterminant de la matrice $A(-aA^2 - bA - cI)$ en fonction de d).*

Réponse : Comme on a supposé que $aA^3 + bA^2 + cA + dI$ est la matrice nulle, on a $-aA^3 - bA^2 - cA = dI$ et, compte tenu que $A = AI$, on a $A(-aA^2 - bA - cI) = dI$. Le déterminant de la matrice $dI = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ vaut d^3, qui n'est pas nul d'après l'énoncé. Donc det $(A(-aA^2 - bA - cI))$ n'est pas nul. Comme ce dernier déterminant est le produit du déterminant de A par celui de $-aA^2 - bA - cI$, on en déduit que le déterminant de A n'est pas nul.

***Exercice* 6** Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$ et celui de $\begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & u \\ -y & -t & 0 & v \\ -z & -u & -v & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} &= -x \det \begin{pmatrix} -x & z \\ -y & 0 \end{pmatrix} + y \det \begin{pmatrix} -x & 0 \\ -y & -z \end{pmatrix} \\ &= -xyz + yxz \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & u \\ -y & -t & 0 & v \\ -z & -u & -v & 0 \end{pmatrix} &= -x\det\begin{pmatrix} -x & t & u \\ -y & 0 & v \\ -z & -v & 0 \end{pmatrix} + y\det\begin{pmatrix} -x & 0 & u \\ -y & -t & v \\ -z & -u & 0 \end{pmatrix} - z\det\begin{pmatrix} -x & 0 & t \\ -y & -t & 0 \\ -z & -u & -v \end{pmatrix} \\
&= -x\left(-x\det\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} - t\det\begin{pmatrix} -y & v \\ -z & 0 \end{pmatrix} + u\det\begin{pmatrix} -y & 0 \\ -z & -v \end{pmatrix}\right) \\
&\quad +y\left(-x\det\begin{pmatrix} -t & v \\ -u & 0 \end{pmatrix} + u\det\begin{pmatrix} -y & -t \\ -z & -u \end{pmatrix}\right) - z\left(-x\det\begin{pmatrix} -t & 0 \\ -u & -v \end{pmatrix} + t\det\begin{pmatrix} -y & -t \\ -z & -u \end{pmatrix}\right) \\
&= -x\left(-xv^2 - tvz + uyv\right) + y\left(-xvu + u(yu - tz)\right) - z\left(-xtv + t(yu - tz)\right) \\
&= x^2v^2 + xtvz - xuyv - yxvu + y^2u^2 - yutz + zxtv - ztyu + t^2z^2 \\
&= x^2v^2 + y^2u^2 + z^2t^2 + 2xvzt - 2xvyu - 2yuzt \\
&= (xv - yu + zt)^2.
\end{aligned}
$$