Université de Provence	Licences PC ($1^{\text{ère}}$ année) et Bio ($2^{\text{ème}}$ année)

Corrigé de la première session

Mathématiques pour PC 2

2008-2009	Mardi 23 juin 2009

Exercice 1. *Équations différentielles*

Résoudre les équations différentielles

$x^4y' + x^3y = x^5$ (la solution particulière est de la forme $y = ax^2$), *(sur 1,5 points)*

$y' + y\cos x = \cos x$ (la solution particulière est constante), *(sur 1,5 points)*

$y'' + 2y' + y = xe^x$ (la solution particulière est de la forme $y = (ax+b)e^x$). *(sur 2 points)*

Réponse: Pour la première équation, $y_p(x) = ax^2$ est solution de $x^4y' + x^3y = x^5$ si et seulement si $x^4(2ax) + x^3ax^2 = x^5$ ce qui fait $3ax^5 = x^5$ et $a = \frac{1}{3}$. Ceci prouve qu'une des solution de $x^4y' + x^3y = x^5$ est $y_p(x) = \frac{x^2}{3}$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $x^4y' + x^3y = 0$. La solution générale de cette équation est

$$y_h(x) = Ce^{\int \left(-\frac{x^3}{x^4}\right)\,dx} = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{e^{\ln x}} = \frac{C}{x} \quad (C \text{ constante}).$$

Celle de $x^4y' + x^3y = x^5$ est donc $\boxed{y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}}$.

Pour la deuxième équation, $y_p(x) = a$ (constante) est solution de $y' + y\cos x = \cos x$ si et seulement si $0 + a\cos x = \cos x$ c'est à dire $a = 1$. Ceci prouve qu'une des solution de $y' + y\cos x = \cos x$ est $y_p(x) = 1$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $y' + y\cos x = 0$. La solution générale de cette équation est

$$y_h(x) = Ce^{\int (-\cos x)\,dx} = Ce^{-\sin x} \quad (C \text{ constante}).$$

Celle de $y' + y\cos x = \cos x$ est donc $\boxed{y(x) = 1 + Ce^{-\sin x}}$.

Pour la troisième équation, $y_p(x) = (ax+b)e^x$ est solution de $y'' + 2y' + y = xe^x$ si et seulement si

$$(ax + b + 2a)e^x + 2(ax + b + a)e^x + (ax + b)e^x = xe^x$$

ce qui fait $(4ax + 4b + 4a)e^x = xe^x$ c'est à dire $\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b + 4a = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$. Ceci prouve qu'une des solutions de $y'' + 2y' + y = xe^x$ est $y_p(x) = \frac{x-1}{4}e^x$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $y'' + 2y' + y = 0$. Compte tenu que le polynôme $X^2 + 2X + 1$ a une racine double qui vaut -1, la solution générale de $y'' + 2y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x} \quad (\lambda, \mu \text{ constantes}).$$

Celle de $y'' + 2y' + y = xe^x$ est donc $\boxed{y(x) = \frac{x-1}{4}e^x + \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x}}$.

Exercice 2. *Courbe paramétrée*

La courbe $\mathcal{C}$ est définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) \end{cases}$

a) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son symétrique par rapport à l'axe des x; calculer x' et y'. Vérifier que si M est sur la courbe $\mathcal{C}$, M' l'est aussi. *(sur 1+1 points)*

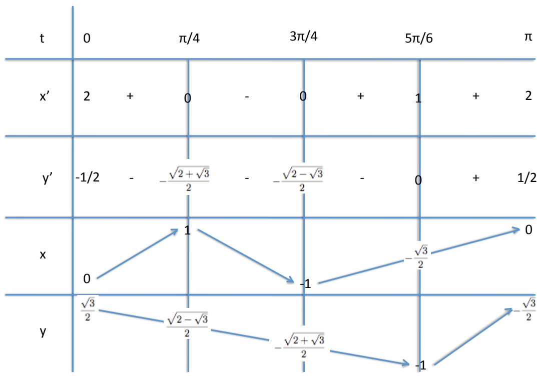
Réponse: Si M a pour coordonnées x et y, son symétrique M' par rapport à l'axe des x a pour coordonnées x et $-y$. Si le point M est sur la courbe, il existe t tel que $x = x(t) = \sin(2t)$ et $y = y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$. Pour obtenir le point M' il suffit d'augmenter t de π:

$$x(t + \pi) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t + \pi) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = -y(t).$$

b) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, \pi]$. *(sur 2,5 points)*

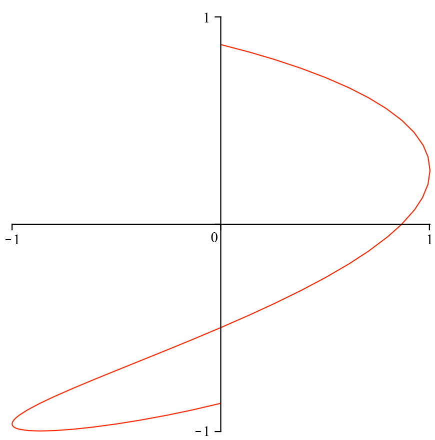
Réponse: Les dérivées de ces fonctions sont $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - t\right) \end{cases}$

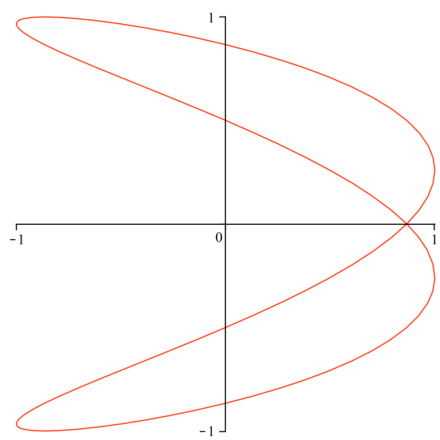
d'où le tableau de variations:



c) Tracer la courbe décrite par le point $M(x(t), y(t))$ pour $t \in [0, \pi]$ puis compléter en utilisant le résultat de la question a. *(sur 2+0,5 points)*

Réponse:





Exercice 3. *Espaces vectoriels*

a) L'application définie par $f(V) = \begin{pmatrix} 2x + ay \\ 5x - by \end{pmatrix}$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est-elle linéaire, c'est à dire vérifie-t-elle les relations $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$ et $f(\lambda V) = \lambda f(V)$? *(sur 2 points)*

Réponse: Pour tout $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *et* $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *on a*

$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$,

$$f(V_1 + V_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2) \\ 5(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + ay_1 \\ 5x_1 - by_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 + ay_2 \\ 5x_2 - by_2 \end{pmatrix} = f(V_1) + f(V_2).$$

Pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et pour tout réel* λ *on a*

$\lambda V = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$,

$f(\lambda V) = \begin{pmatrix} 2\lambda x + a\lambda y \\ 5\lambda x - b\lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x + ay \\ 5x - by \end{pmatrix} = \lambda f(V)$.

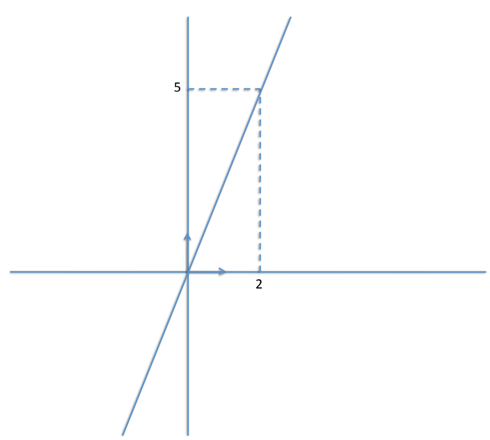
b) On rappelle qu'un vecteur W appartient à $\mathrm{Im}f$ s'il existe $V \in \mathbb{R}^2$ tel que $W = f(V)$. Trouver une base de $\mathrm{Im}f$ (distinguer les cas $b \neq -\frac{5}{2}a$ et $b = -\frac{5}{2}a$). Dans ce dernier cas, représenter l'ensemble des points du plan dont les coordonnées appartiennent à $\mathrm{Im}f$. *(sur 1+1+1 points)*

Réponse: Ces vecteurs W *s'écrivent*

$$W = \begin{pmatrix} 2x + ay \\ 5x - by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay \\ -by \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix},$$

les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ *forment donc une famille génératrice de* Imf. *Ils sont colinéaires si et seulement si* $b = -\frac{5}{2}a$. *Ils forment une base de* Imf *dans le cas contraire c'est à dire si* $b \neq -\frac{5}{2}a$.

Dans le cas $b = -\frac{5}{2}a$, *les deux vecteurs ne forment pas une famille libre donc pas une base; la base de* Imf *est* $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$; Imf *est l'ensemble des vecteurs colinéaires à* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, *qu'on peut représenter par une droite:*



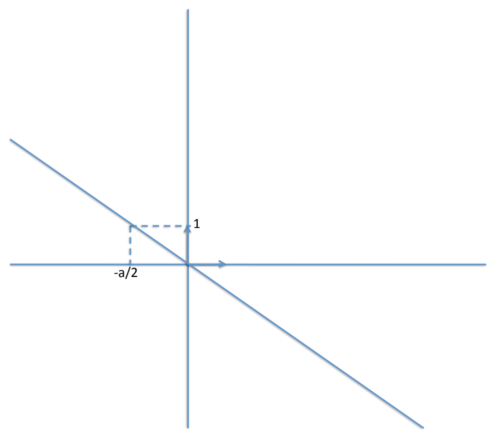
c) On rappelle qu'un vecteur V appartient à $\mathrm{Ker}f$ si $f(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}f$, en distinguant les cas $b \neq -\frac{5}{2}a$ et $b = -\frac{5}{2}a$. Dans ce dernier cas, représenter l'ensemble des points du plan dont les coordonnées appartiennent à $\mathrm{Ker}f$. *(sur 1+1+1 points)*

Réponse: $f(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *équivaut au système d'équations* $\begin{cases} 2x + ay = 0 \\ 5x - by = 0 \end{cases}$ *et, en retranchant* $\frac{5}{2}$ *fois la première à la deuxième,* $\begin{cases} 2x + ay = 0 \\ -\frac{5a + 2b}{2} y = 0 \end{cases}$.

La deuxième équation a pour solution $y = \frac{0}{-\frac{5a+2b}{2}} = 0$ *si* $5a + 2b$ *n'est pas nul c'est à dire si* $b \neq -\frac{5}{2}a$.

On a alors aussi $x = 0$ *d'après la première équation, et Kerf* $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dans le cas $b = -\frac{5}{2}a$, *la deuxième équation devient* $0y = 0$ *et elle est vérifiée par tout réel* y. *La première équation donne* $x = -\frac{a}{2}y$ *et par conséquent Kerf est l'ensemble des vecteurs* $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, *où* y *est un réel quelconque.*



d) Pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on appelle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le vecteur $f(V)$, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Dans le cas $a = -5$ et $b = -2$, calculer z' en fonction de z et en déduire que le vecteur $f(V)$ est le transformé de V par une similitude dont on calculera le rapport. *(sur 1,5+1,5 points)*

Réponse:

$$\begin{aligned} z' = (2x + ay) + i(5x - by) &= (2x - 5y) + i(5x + 2y) \qquad (\textit{parce que } a = -5 \textit{ et } b = -2) \\ &= 2x + 5i^2y + 5ix + 2iy \qquad (\textit{parce que } i^2 = -1) \\ &= 2(x + iy) + 5i(x + iy) \\ &= (2 + 5i)(x + iy) \\ &= (2 + 5i)z \end{aligned}$$

En appelant ρ *et* θ *les coordonnées polaires du nombre complexe* $2 + 5i$ *on a*

$$z' = \rho e^{i\theta} z$$

donc $f(V)$ *est le transformé de* V *par la similitude d'angle* θ *et de rapport* $\rho = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.