

Corrigé de l'examen de mathématiques

Exercice 1 Équation différentielle

1) On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = 2x \exp(-x).$$

a) (2 pts) Résoudre cette équation.

Réponse : On peut utiliser la méthode de variation de la constante. On trouve $y(x) = (x^2 + C) \exp(-x)$ avec C constante.

b) (0,5 pt) Déterminer la solution qui vérifie

$$y(0) = 1.$$

Réponse : $y(x) = (x^2 + 1) \exp(-x)$.

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = 2x \exp(-x).$$

a) (2,5 pts) Résoudre l'équation différentielle

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4x^2 - 1.$$

Réponse : $y(x) = -4x^2 + 8x - 23 + A \exp(x) + B \exp(-x/2)$.

Exercice 2 Systèmes linéaires

1. (2 pts) Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles x, y, z et t

$$\begin{cases} x + 2y + z - 4t = 2 \\ \quad -y + 3z - 2t = 3 \\ x + y - 2z = -1 \\ \quad y - 2t = 1 \end{cases}$$

Réponse : $x = z = 0$, $y = t = -1$.

2. (3 pts) Déterminer suivant les valeurs du réel a l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Réponse : La solution est $x = y = z = 0$ sauf si $a = 1$ ou -3 .

Si $a = 1$, $x = -z$ et $y = 0$ (z est quelconque).

Si $a = -3$, $x = z$ et $y = -2z$ (z est quelconque).

Exercice 3 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique. Les 4 questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (0,5 pt) Les vecteurs $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$ et $\vec{c} = (1, -4, 2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Réponse : Non, le premier est la somme des deux autres.

2. (1 pt) On définit l'ensemble $F = \{(s, t, 3s + t) \text{ avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer une base de F .

Réponse : $\{(1, 0, 3), (0, 1, 1)\}$.

3. On définit l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0 \text{ et } x - 3y + z = 0\}$.

(a) (1 pt) Déterminer une base de H et en déduire la nature géométrique de H .

Réponse : $\{(1, -1, -4)\}$, c'est une droite.

(b) (0,5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de H .

Réponse : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -4t \end{cases}$

4. Soit P le plan qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= s - t \\ y &= 3t \\ z &= s - t \end{cases}$$

avec $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ et soit D la droite qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= u \\ y &= 0 \\ z &= -u \end{cases}$$

avec $u \in \mathbb{R}$.

(a) (1 pt) Déterminer une équation cartésienne de P .

Réponse : $x - z = 0$ (tous les éléments du plan P vérifient cette équation, et les éléments de l'espace qui vérifient cette équation forment un plan P' , donc $P = P'$).

(b) (0,5 pt) Déterminer un vecteur directeur de D .

Réponse : $(1, 0, -1)$.

(c) (0,5 pt) La droite D est-elle incluse dans le plan P ?

Réponse : Non (ne vérifie pas l'équation de P).

(d) (1 pt) La droite D est-elle orthogonale au plan P ?

Réponse : Oui (le produit scalaire de $(x, y, z) \in P$ par $(1, 0, -1)$ est nul).

Exercice 4 On considère la courbe (C) de représentation paramétrique en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(t) &= 3t + t^3 \\ y(t) &= t - \frac{1}{t} \end{cases}$$

1. (0,5 pt) Déterminer l'ensemble de définition.

Réponse : $\mathbb{R}^*$.

2. (0,5 pt) Étudier les symétries de la courbe et en déduire que l'intervalle d'étude se réduit à $]0; +\infty[$.

Réponse : Elle est symétrique par rapport à l'origine parce que $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

3. (1,5 pt) Déterminer le tableau de variations sur $]0; +\infty[$.

Réponse :

t	0	1	π
x'	0	+	0
x	0	$\nearrow +\infty$	
y'		+	
y	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	

4. (1,5 pt) Étudier les branches infinies sur $]0; +\infty[$.

Réponse : Quand t tend vers 0, la limite de y est $-\infty$ donc la demi-droite verticale est asymptote.

Réponse : Quand t tend vers $+\infty$ la branche infinie est parabolique dans la direction de l'axe des x , puisque $\frac{y(t)}{x(t)}$ converge vers 0 sans que $y(t)$ converge vers une limite finie.

5. (1 pt) Tracer la courbe (C) .

Réponse :

