Université de Provence	Licences PC ($1^{\text{ère}}$ année) et Bio ($2^{\text{ème}}$ année)
Corrigé de la première session	
Mathématiques pour PC 2	
2008-2009	Vendredi 26 juin 2009

Exercice 1. *Équations différentielles*

Résoudre les équations différentielles

$xy' - y = x^2 \cos x$ (la solution particulière est de la forme $y = (ax + b)\sin x$), *(sur 1,5 points)*

$xy' + y = e^x$ (la solution particulière est de la forme $y = a\dfrac{e^x}{x}$), *(sur 1,5 points)*

$y'' + 3y' + 2y = e^x$ (la solution particulière est de la forme $y = ae^x$). *(sur 2 points)*

Réponse: Pour la première équation, $y_p(x) = (ax + b)\sin x$ est solution de $xy' - y = x^2 \cos x$ si et seulement si

$$x\big(a\sin x + (ax + b)\cos x\big) - (ax + b)\sin x = x^2 \cos x$$

ce qui fait $ax^2 \cos x + bx\cos x - b\sin x = x^2 \cos x$ et pour que cette égalité soit vraie il suffit de prendre $a = 1$ et $b = 0$. Ceci prouve qu'une des solution de $xy' - y = x^2 \cos x$ est $y_p(x) = x\sin x$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $xy' - y = 0$. La solution générale de cette équation est

$$y_h(x) = Ke^{\int \left(\frac{1}{x}\right)\, dx} = Ke^{\ln|x|} = K|x| \quad (K \text{ constante})$$

et on a $K|x| = \pm Kx = Cx$ (C constante). La solution générale de $xy' - y = x^2 \cos x$ est donc $\boxed{y(x) = x\sin x + Cx}$.

Pour la deuxième équation, $y = a\dfrac{e^x}{x}$ est solution de $xy' + y = e^x$ si et seulement si $xa\dfrac{e^x x - e^x}{x^2} + a\dfrac{e^x}{x} = e^x$ c'est à dire après simplifications $ae^x = e^x$ et $a = 1$. Ceci prouve qu'une des solution de $xy' + y = e^x$ est $y_p(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $xy' + y = 0$. La solution générale de cette équation est

$$y_h(x) = Ke^{\int \left(-\frac{1}{x}\right)\, dx} = Ke^{-\ln|x|} = \frac{K}{e^{\ln|x|}} = \frac{K}{|x|} \quad (K \text{ constante})$$

et on a $\dfrac{K}{|x|} = \pm\dfrac{K}{x} = \dfrac{C}{x}$ (C constante). La solution générale de $xy' + y = e^x$ est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{e^x + C}{x}}$.

Pour la troisième équation, $y_p(x) = ae^x$ est solution de $y'' + 3y' + 2y = e^x$ si et seulement si

$$ae^x + 3ae^x + 2ae^x = e^x$$

ce qui fait $6ae^x = e^x$ c'est à dire $a = \dfrac{1}{6}$. Ceci prouve qu'une des solutions de $y'' + 2y' + y = e^x$ est $y_p(x) = \dfrac{1}{6}e^x$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $y'' + 3y' + 2y = 0$. Compte tenu que le polynôme $X^2 + 3X + 2$ a pour racines -2 et -1, la solution générale de $y'' + 3y' + 2y = 0$ est

$$y_h(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} \quad (\lambda, \mu \text{ constantes}).$$

Celle de $y'' + 3y' + 2y = e^x$ est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{6}e^x + \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x}}$.

Exercice 2. *Courbe paramétrée*

On appellera $M(t)$ le point de coordonnées $x(t) = \sin(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.

a) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. *(sur 2,5 points)*

Réponse: Les dérivées de ces fonctions sont $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = 3\cos(3t) \end{cases}$

d'où le tableau de variations:

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
x'	2	$+$	1	$+$	0	$-$	-2
y'	3	$+$	0	$-$	$-3\sqrt{2}/2$	$-$	0
x	0		$\sqrt{3}/2$		1		0
y	0		1		$\sqrt{2}/2$		-1

b) Les points $M(-t)$, $M(t+\pi)$ et $M(t+2\pi)$ sont-ils symétriques de $M(t)$ par rapport à un des deux axes ou par rapport à l'origine? *(sur 0,5+0,5+0,5 points)*

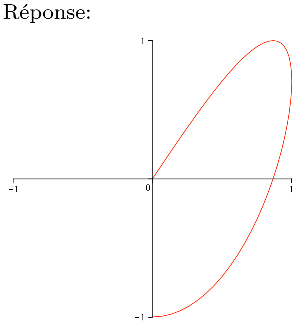
Réponse: Comme les coordonnées de $M(-t)$ sont $\sin(-2t) = -\sin(2t) = -x(t)$ et $\sin(-3t) = -\sin(3t) = -y(t)$, ce point est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine.

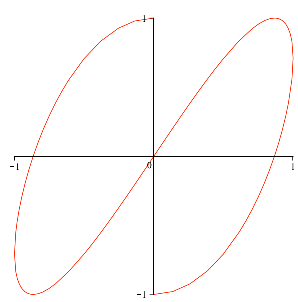
Comme les coordonnées de $M(t+\pi)$ sont $\sin(2t+2\pi) = \sin(2t) = x(t)$ et $\sin(3t+3\pi) = -\sin(3t) = -y(t)$, ce point est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x.

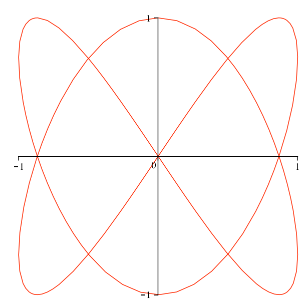
Comme les coordonnées de $M(t+2\pi)$ sont $\sin(2t+4\pi) = \sin(2t) = x(t)$ et $\sin(3t+6\pi) = \sin(3t) = y(t)$, ce point est confondu avec $M(t)$.

c) Tracer la courbe décrite par le point $M(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en utilisant le résultat de la question b). Tracer finalement la courbe décrite par le point $M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ne pas oublier de placer les points $M(t)$ pour les valeurs de t figurant sur le tableau de variations, ainsi que pour les valeurs $-t$ et $t+\pi$ correspondantes). *(sur 2+1+1 points)*

Réponse:







Exercice 3. *Espaces vectoriels*

a) Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=3 \end{cases}$. *(sur 2 points)*

Réponse: La troisième équation est la somme de la première et de la deuxième, elle ne sert donc à rien (si les deux premières sont vérifiées la troisième l'est aussi).

On calcule x et y en fonction de z (par exemple). En retranchant la première équation de la deuxième on obtient $y+2z=1$ ce qui fait $y=1-2z$. Puis la première équation permet de calculer $x=1-y-z=$

$1-(1-2z)-z=z$. *Les solutions du système d'équations sont donc les triplets* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tels que*

$$x=z,\ y=1-2z,\ z \text{ quelconque.}$$

b) Trouver deux vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, V_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et démontrer que le rang de la famille $\{V_1,V_2,V_3\}$ est 2. *(sur 1+1 points)*

Réponse: V_1,V_2, *non colinéaires, sont donc linéairement indépendants.* V_1,V_2,V_3 *ne le sont pas puisque* $V_1-2V_2+V_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Le rang de la famille* $\{V_1,V_2,V_3\}$ *n'est donc pas* 3 *mais* 2.

c) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(sur 1 point)*

Réponse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. *Applications linéaires*

Soit f l'application qui associe à tout vecteur $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $f(V)=\begin{pmatrix} x-2y \\ 4y-2x \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que f est linéaire, c'est à dire que $f(V_1+V_2)=f(V_1)+f(V_2)$ et $f(\lambda V)=\lambda f(V)$ pour tout $V_1,V_2,V\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. *(sur 2 points)*

Réponse: Pour tout $V_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *et* $V_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *on a*

$$V_1+V_2=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix},$$

$$f(V_1+V_2)=\begin{pmatrix} (x_1+x_2)-2(y_1+y_2) \\ 4(y_1+y_2)-2(x_1+x_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-2y_1 \\ 4y_1-2x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2-2y_2 \\ 4y_2-2x_2 \end{pmatrix}=f(V_1)+f(V_2).$$

Pour tout $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et pour tout réel* λ *on a*

$$\lambda V=\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix},$$

$$f(\lambda V)=\begin{pmatrix} \lambda x-2\lambda y \\ 4\lambda y-2\lambda x \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x-2y \\ 4y-2x \end{pmatrix}=\lambda f(V).$$

b) Déterminer Imf (= ensemble des $f(V)$) et Ker$f$ (= ensemble des $V\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(V)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). *(sur 1,5+1,5 points)*

Réponse: Les vecteurs de $\mathrm{Im} f$ *s'écrivent*

$$f(V) = \begin{pmatrix} x-2y \\ 4y-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2(x-2y) \end{pmatrix} = (x-2y)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Im} f$ *est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur V *appartient à* $\mathrm{Ker} f$ *si et seulement si* $f(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *et d'après le calcul précédent c'est équivalent à* $x - 2y = 0$ *c'est à dire à* $x = 2y$. $\mathrm{Ker} f$ *est donc l'ensemble des vecteurs*

$$V = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.