Université Aix-Marseille
Licence PC

27◁06◁2013

Corrigé de l'examen de mathématiques

Exercice 1 Équation différentielle

1) On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 1.$$

a) (2 pts) Résoudre l'équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Réponse : On intègre $\frac{2}{x}$, on trouve $2\ln x$. Donc la solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = K\exp(2\ln x) = Kx^2$.
Par la méthode de variation des constantes, on reporte $y(x) = K(x)x^2$ et sa dérivée $y'(x) = K'(x)x^2 + K(x)2x$ dans l'équation avec second membre, ce qui fait après simplification $K'(x)x^2 = 1$, et $K'(x) = \frac{1}{x^2}$ puis $K(x) = -\frac{1}{x}$ et $y(x) = -x$.
Finalement $\boxed{y(x) = -x + Kx^2}$ (K est à nouveau une constante).

b) (1 pt) Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale

$$y(1) = 1.$$

Réponse : Remplaçons x et $y(x)$ par 1. On obtient $K = 2$ d'où $\boxed{y(x) = -x + 2x^2)}$.

2) (2 pts) Résoudre l'équation différentielle

$$2y''(x) - 2y'(x) - y(x) = \exp(3x).$$

Réponse : $(Kx + L)\exp(x)$ pour l'équation sans second membre. Or la solution de l'équation avec second membre est de la forme $y = a\exp(3x)$. On trouve $a = \frac{1}{4}$, d'où $\boxed{y(x) = \frac{1}{4}\exp(3x) + (Kx + L)exp(x)}$.

Exercice 2 Systèmes linéaires

1. (2 pts) Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles x, y et z, en utilisant la méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Réponse : On permute les lignes 2 et 3, de façon à avoir un système triangulaire. On obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & - & 8t & = & 0 \\ & & & - & z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\boxed{z = -3t}$, $\boxed{y = -7t}$ et $\boxed{x = 2t}$.

2. (2 pts) Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles x, y et z, en utilisant la méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Réponse : Le système triangulaire obtenu par la méthode de Gauss est

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & + & y & - & 3z & & & = & 1 \\ & - & y & + & 4z & & & = & -1 \\ & & & & 4z & & & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 3 \end{array}\right.$$

il n'y a donc pas de solution.

Exercice 3 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique. Les 4 questions de cet exercice sont indépendantes. Justifier les réponses.

1. (1 pt)Énoncer la définition d'un plan vectoriel.
Réponse : Ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

2. (0,5 pt) Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ peut-elle être formée de deux vecteurs ?
Réponse : Oui s'ils ne sont pas colinéaires.

3. (0,5 pt) Les vecteurs $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3, 2)$ et $\vec{c} = (1, 4, 3)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
Réponse : Non, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

4. Soit F le sous-espace vectoriel qui a pour base le vecteur $(-2, -1, 5)$.

(a) (0,5 pt) Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (4, -2, 10)$ appartient à F ?
Réponse : Non, il n'est pas colinéaire à $(-2, -1, 5)$.

(b) (0,5 pt) Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (-8, -4, 20)$ appartient à F ?
Réponse : Oui, il est colinéaire à $(-2, -1, 5)$.

5. Soit P l'ensemble des vecteurs (x, y, z) tels que

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2s - t \\ y = s + 3t \\ z = s - 2t \end{array}\right.$$

avec $(s, t) \in \mathbb{R}$.

(a) (0,5 pt) P est-il un plan vectoriel ou une droite vectorielle ?

Réponse : Plan, $(2, 1, 1)$ et $(-1, 3, -2)$ ne sont pas colinéaires.

(b) (0,5 pt) Déterminer deux vecteurs directeurs de P.

Réponse : $(2, 1, 1)$ et $(-1, 3, -2)$.

(c) (0,5 pt) Déterminer un vecteur normal à P.

Réponse : $(-5, 3, 7)$.

(d) (0,5 pt) Déterminer une équation cartésienne de P.

Réponse : $-5x + 3y + 7z = 0$.

Exercice 4 Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la courbe (C) de représentation paramétrique en coordonnées polaires

$$r(\theta) = a(1 + \cos\theta).$$

1. (0,5 pt) Déterminer l'ensemble de définition.
Réponse : C'est $\mathbb{R}$.

2. (1 pt) Démontrer que l'intervalle d'étude est $[0, \pi]$ (expliquer pourquoi).

Réponse : La fonction r a pour période 2π. Les points dont les affixes ont pour argument θ et $-\theta$, ont des affixes de même module.

3. (1 pt) Établir le tableau de variations sur $[0, \pi]$.
Réponse :

θ	0	π/2	π
r′(θ)	0	−	0
r(θ)	2a	↘	0

4. (1 pt) Étudier les tangentes aux points qui apparaissent dans le tableau de variations.
Réponse : Quand $r'(\theta)$ est nul, $r(\theta)$ est maximal donc la tangente au point M est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$. Mais ceci ne s'applique qu'à $\theta = 0$: la tangente au point $(2a, 0)$ est alors perpendiculaire à l'axe des x. Ceci ne peut pas s'appliquer à $\theta = \pi$, parce qu'alors $\overrightarrow{OM}$ est nul. Par contre la pente du segment $[OM]$ est $\tan\theta$, qui tend vers 0 quand θ tend vers π. C'est pourquoi la tangente au point O est l'axe des x.

5. (1,5 pt) Tracer la courbe (C).
Réponse : Dans le cas $a = 1$ c'est