Université de Provence	Licences PC ($1^{\text{ère}}$ année) et Bio ($2^{\text{ème}}$ année)

Corrigé de la deuxième session

Mathématiques pour PC 2

2008-2009	Lundi 7 septembre 2009

Exercice 1. *Équations différentielles*

a) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{1}{x}$ (la solution particulière est de la forme $y = a\dfrac{\ln x}{x}$). *(sur 1,5 point)*

Réponse: $y_p(x) = a\dfrac{\ln x}{x}$ est solution de $xy' + y = \dfrac{1}{x}$ si et seulement si

$$xa\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} + a\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}$$

ce qui fait $\dfrac{a}{x} = \dfrac{1}{x}$ c'est à dire $a = 1$. Une des solution de $xy' + y = \dfrac{1}{x}$ est donc $y_p(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Si on veut toutes les solutions il faut ajouter à $y_p(x)$ la solution générale de $xy' + y = 0$, qui est

$$y_h(x) = Ke^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\,dx} = Ke^{-\ln|x|} = \frac{K}{e^{\ln|x|}} = \frac{K}{|x|} \quad (K \text{ constante})$$

et on a $\dfrac{K}{|x|} = \pm\dfrac{K}{x} = \dfrac{C}{x}$ (C constante). La solution générale de $xy' + y = \dfrac{1}{x}$ est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{\ln x + C}{x}}$.

b) Étant donnée une constante a, résoudre l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ (la réponse dépend du signe de a), puis résoudre $y'' + ay = 1$. *(sur 1,5+1 points)*

Réponse: Pour résoudre $y'' + ay = 0$ on résoud d'abord (dans $\mathbb{C}$) l'équation $r^2 + a = 0$. On a $r^2 = -a$ donc $r = \pm\sqrt{-a}$ si $-a$ est positif c'est à dire si a est négatif; cette racine est double si $a = 0$. Par contre $r = \pm i\sqrt{a}$ si a est strictement positif.

On en déduit, en utilisant les formules générales, que les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ sont

$y_h(x) = \lambda e^{-x\sqrt{-a}} + \mu e^{x\sqrt{-a}}$ si $a < 0$,

$y_h(x) = \lambda x + \mu$ si $a = 0$,

$y_h(x) = \lambda\cos\left(x\sqrt{a}\right) + \mu\sin\left(x\sqrt{a}\right)$ si $a > 0$.

La fonction constante $y_p(x) = \dfrac{1}{a}$ est évidemment solution de $y'' + ay = 1$. La solution générale de cette équation est donc

$y(x) = \frac{1}{a} + \lambda e^{-x\sqrt{-a}} + \mu e^{x\sqrt{-a}}$ si $a < 0$,

$y(x) = \frac{1}{a} + \lambda x + \mu$ si $a = 0$,

$y(x) = \frac{1}{a} + \lambda\cos\left(x\sqrt{a}\right) + \mu\sin\left(x\sqrt{a}\right)$ si $a > 0$.

Exercice 2. *Courbe paramétrée*

On appellera $M(t)$ le point de coordonnées $x(t) = \cos(2t) + \cos(t)$ et $y(t) = \sin(2t) - \sin(t)$.

a) Calculer l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$, sous forme d'une somme d'exponentielles complexes. *(sur 1,5 point)*

Réponse:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + iy(t) \\ &= \cos(2t) + \cos(t) + i\sin(2t) - i\sin(t) \\ &= \big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) + \big(\cos(-t) + i\sin(-t)\big) \\ &= e^{2it} + e^{-it}. \end{aligned}$$

b) Vérifier que $z\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}z(t)$ et en déduire que $M\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ est le transformé de $M(t)$ par une rotation (on précisera de quelle rotation il s'agit). Vérifier également que $M(-t)$ est le transformé de $M(t)$ par une symétrie dont on précisera l'axe. *(sur 1,5+1+1 points)*

Réponse:

$$
\begin{aligned}
z\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) &= e^{2i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)} \\
&= e^{2it}e^{\frac{4i\pi}{3}}+e^{-it}e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\
&= e^{2it}e^{\frac{4i\pi}{3}}+e^{-it}e^{2i\pi-\frac{2i\pi}{3}} \\
&= e^{2it}e^{\frac{4i\pi}{3}}+e^{-it}e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
&= e^{\frac{4i\pi}{3}}z(t).
\end{aligned}
$$

$M\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est donc le transformé de $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$.

$M(-t)$, d'abscisse $x(-t)=\cos(-2t)+\cos(-t)=\cos(2t)+\cos(t)=x(t)$ et d'ordonnée $y(-t)=\sin(-2t)-\sin(-t)=-\sin(2t)+\sin(t)=-y(t)$, est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x.

c) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ (on vérifiera que $x'(t)$ est négatif et que $y'(t)$ s'annule pour une seule valeur de t). *(sur 2 points)*

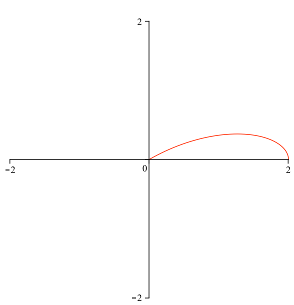
Réponse: Les dérivées de ces fonctions sont $\begin{cases} x'(t)=-2\sin(2t)-\sin(t) \\ y'(t)=2\cos(2t)-\cos(t)\end{cases}$. On en déduit que $x'(t)=-4\sin(t)\cos(t)-\sin(t)=-\sin(t)\big(4\cos(t)+1\big)$ est négatif pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$. D'autre part $y'(t)=2\big(2\cos^2(t)-1\big)-\cos(t)$ est un polynôme en $c=\cos(t)$, c'est le polynôme $4c^2-c-2$. Les racines de ce polynôme sont $\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\simeq -0,59$ et $\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\simeq 0,84$, et il existe bien un réel $t\simeq 0,57$ radians (inférieur à $\dfrac{\pi}{3}\simeq 1,05$ radians) tel que $\cos(t)\simeq 0,84$.

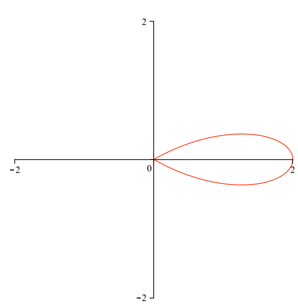
D'où le tableau de variations:

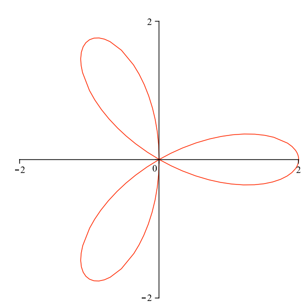
t	0		0,57		π/3
x'	0	-	-2,35	-	-2,6
y'	1	+	0	-	-1,5
x	2		1,26		0
y	0		0,37		0

d) Tracer la courbe décrite par le point $M(t)$ pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$, puis pour $t\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$, puis pour tout $t\in\mathbb{R}$, en utilisant les résultats de la question b) (ne pas oublier de placer les points $M(t)$ pour les valeurs de t figurant sur le tableau de variations ainsi que leurs transformés par la rotation et par la symétrie). *(sur 1+0,5+1,5 points)*

Réponse:







Exercice 3. *Espaces vectoriels*

Soit f l'application qui associe à tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur

$$f(V) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et g l'application qui associe à tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur

$$g(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) On définit une application h en posant $h(V) = \frac{1}{2}\big(V + g(V)\big)$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Calculer $h(V)$ et vérifier que h est linéaire c'est à dire que $h(V_1+V_2) = h(V_1)+h(V_2)$ et $h(\lambda V) = \lambda h(V)$ pour tout $V_1, V_2, V \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; déterminer Imh (= ensemble des $h(V)$) et Ker$h$ (= ensemble des $V \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) ainsi qu'une base de chacun de ces deux sous-espaces vectoriels. *(sur 1+1+1+1 points)*

Réponse:

$$\begin{aligned} h(V) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour tout $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on a

$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$,

$h(V_1 + V_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = h(V_1) + h(V_2).$

Pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a

$\lambda V = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$,

$h(\lambda V) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda h(V).$

Imh est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont égaux à $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, une base de Im$h$ est donc $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Ker$h$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est donc l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont égaux à $y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, une base de Ker$h$ est donc $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Calculer les coordonnées x' et y' du vecteur $f(V)$; en déduire $x'+iy' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x+iy)$ puis en déduire que $f^3(V)$ (c'est à dire $f(f(f(V)))$) est égal à V. Calculer aussi $g^2(V)$ et $h^2(V)$. *(sur 0,5+1,5+1+0,5+0,5 points)*

Réponse: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x+y\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-x\sqrt{3}-y}{2} \end{pmatrix}$. L'affixe de ce vecteur est

$$\begin{aligned} x'+iy' &= \frac{-x+y\sqrt{3}}{2} + i\frac{-x\sqrt{3}-y}{2} \\ &= x\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} + y\tfrac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= x\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} + iy\tfrac{-i\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x+iy). \end{aligned}$$

De même l'affixe du vecteur $f(f(V))$ vaut $x''+iy'' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x'+iy')$ et l'affixe du vecteur $f(f(f(V)))$ vaut $x'''+iy''' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x''+iy'')$. On en déduit $x'''+iy''' = \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 (x+iy)$ et, après avoir calculé $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$, on en déduit que $f(f(f(V)))$ a même affixe que V c'est à dire $f^3(V) = V$.

D'autre part puisque pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a $g(V) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, on a donc $g(g(V)) = \begin{pmatrix} x \\ -(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V$.

Enfin comme l'image par h de tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $h(V) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, l'image par h de $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui fait $h(h(V)) = h(V)$.

c) $f(g(V))$ est-il égal à $g(f(V))$? Déterminer l'ensemble des vecteurs V qui vérifient cette égalité. *(sur 1+1 points)*

Réponse: Ayant calculé à la question précédente $g(V) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, on en déduit $f(g(V)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x-y\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-x\sqrt{3}+y}{2} \end{pmatrix}$.

Ayant calculé à la question précédente $f(V) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x+y\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-x\sqrt{3}-y}{2} \end{pmatrix}$, on en déduit $g(f(V)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-x+y\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-x\sqrt{3}-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x+y\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{x\sqrt{3}+y}{2} \end{pmatrix}$. On constate que $f(g(V))$ est en général différent de $g(f(V))$. Ils ne sont égaux que si $\dfrac{-x-y\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-x+y\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-x\sqrt{3}+y}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}+y}{2}$, ce qui fait $y=0$, $x=0$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.