**Université d'Aix-Marseille I** — **Licence de mathématiques, deuxième année**

**Faculté des sciences, Saint Charles** — **TD intégration 1**

## Corrigé de la feuille 2

$\boxed{1}$ Pour les trois subdivisions:
$\mathcal{P}_1 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],3/4)\}$,
$\mathcal{P}_2 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],3/5)\}$,
$\mathcal{P}_3 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],1/2)\}$,
le second intervalle est $I_2 = [1/4,1/2]$ et le second point de marquage $t_2 = 1/2$. Pour savoir si elles sont $\delta$-fines, on utilise la valeur de la jauge $\delta$ aux points de marquage, donc (entre autres) on utilise $\delta(t_2) = \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{4}$.
Aucune de ces subdivisions n'est $\delta$-fine puisque

$$I_2 \not\subseteq \left[t_2 - \frac{\delta(t_2)}{2},\ t_2 + \frac{\delta(t_2)}{2}\right] = \left[\frac{3}{8},\ \frac{5}{8}\right].$$

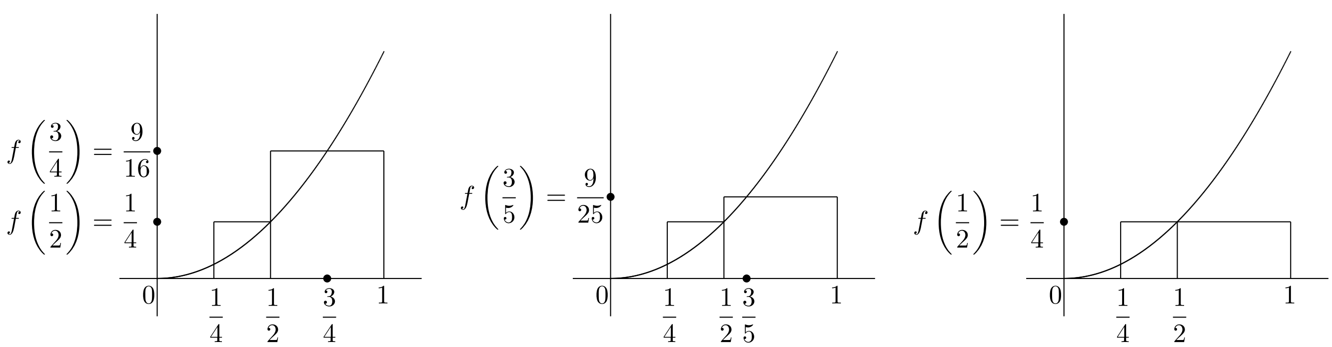
Soit maintenant la fonction $f(x) = x^2$; calculons la somme de Riemann de $f$ associée à la subdivision $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{array}{rcl} S(f,\mathcal{P}_1) & = & \sum_{i=1}^{3} |I_k| f(t_k) \\ & = & \frac{1}{4}(t_1)^2 + \frac{1}{4}(t_2)^2 + \frac{1}{2}(t_3)^2 \\ & = & \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{9}{16} \\ & = & \frac{11}{32}. \end{array}$$

On calcule de même

$$\begin{array}{rcl} S(f,\mathcal{P}_2) & = & \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{9}{25} = \frac{97}{400} \\ S(f,\mathcal{P}_3) & = & \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{16}. \end{array}$$

Représentation de $S(f,\mathcal{P}_1)$, $S(f,\mathcal{P}_2)$ et $S(f,\mathcal{P}_3)$:




$S(f,\mathcal{P})$ est la somme des surfaces des rectangles.
La partie inférieure de chaque rectangle est un intervalle de la partition.
La partie supérieure de chaque rectangle coupe la courbe en un point, dont l'abscisse est un point de marquage.
Le rectangle de gauche est plat (parce que le premier point de marquage est 0).
Le rectangle de droite change suivant que la partition est $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ ou $\mathcal{P}_3$ (parce que le dernier point de marquage n'est pas le même).

$\boxed{2}$ Aucune des trois subdivisions n'est $\delta$-fine, pour la même raison.
Les sommes de Riemann sont les mêmes qu'à l'exercice 1, puisque les sommes de Riemann ne dépendent pas de la jauge.

$\boxed{3}$ (a) On part d'une subdivision pointée (la plus générale possible) de l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathcal{P} = \{([x_0,x_1],t_1),\ ([x_1,x_2],t_2),\ \ldots,\ ([x_{n-1},x_n],t_n)\}.$$

On remarque que la fonction $\eta$ définie dans l'énoncé vérifie $\eta(t) < t$ pour tout $t \in ]0,1]$. Il s'agit de démontrer que, si $\mathcal{P}$ est $\eta$-fine alors $t_1 = 0$. En effet l'inclusion

$$* \qquad [x_0, x_1] = [0, x_1] \subseteq \left[t_1 - \frac{\eta(t_1)}{2},\ t_1 + \frac{\eta(t_1)}{2}\right]$$

ne pourrait avoir lieu si $t_1$ n'était pas nul puisque

$$t_1 - \frac{\eta(t_1)}{2} > t_1 - \frac{t_1}{2} = \frac{t_1}{2} > 0.$$

On démontre de même que le dernier point de marquage ne peut valoir que 1.

(b) Maintenant il faut choisir les intervalles et les points de marquage de la subdivision $\mathcal{P}$, de façon que celle-ci soit $\eta$-fine.

• Première condition, pour que l'inclusion $(*)$ ait lieu avec $t_1 = 0$, il faut que $x_1 \leq 1/8$ puisque $\left[0 - \frac{\eta(0)}{2},\ 0 + \frac{\eta(0)}{2}\right] = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$.

• De même, pour que l'intervalle $[x_{n-1}, x_n]$ (c'est dire $[x_{n-1}, 1]$) soit inclus dans l'intervalle centré en $t_n = 1$ et de longueur $\eta(t_n) = \frac{1}{4}$, il faut que $x_{n-1} \geq 7/8$. On peut donc choisir

$$x_1 = 1/8 \quad \text{et} \quad x_{n-1} = 7/8.$$

• Pour ce qui est des autres $x_k$, on peut les espacer de $\frac{1}{16}$ puisque $\frac{1}{16}$ est le minimum de $\eta(t)$ pour $t \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$: on choisit

$$x_k = \frac{1}{8} + \frac{k-1}{16} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots, 13,$$

et $t_k$ sera le milieu du segment $[x_{k-1}, x_k]$ pour $k = 2, 3, \ldots, 13$, sauf $t_1 = x_0 = 0$ et $t_{14} = x_{14} = 1$.

$\boxed{4}$ Soit $f$ la fonction nulle partout sur $]0,1]$ et égale à 1 en 0. On va démontrer que $f$ est intégrable et que son intégrale est nulle.

Soit $\varepsilon > 0$. Essayons la jauge constante $\delta(x) = \varepsilon$: soit $\mathcal{P}$ une subdivision $\delta$-fine; la somme de Riemann

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(t_k)$$

vaut 0 si tous les $t_k$ sont strictement positifs; sinon on a $t_1 = 0$ donc $f(t_1) = 1$ et

$$S(f, \mathcal{P}) = |I_1| f(t_1) = |I_1|.$$

Mais comme la subdivision est $\delta$-fine, la longueur de l'intervalle $I_1$ ne dépasse pas $\delta(t_1) = \varepsilon$. Donc dans les deux cas on a $|S(f, \mathcal{P}) - 0| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $f$ est intégrable d'intégrale nulle.

$\boxed{5}$ Démontrons de même que la fonction $k$, définie sur $[0,1]$ par

$$k(x) = n \text{ si } x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ k(x) = 0 \text{ sinon},$$

est intégrable d'intégrale nulle.

Soit $\varepsilon > 0$, $\delta$ une jauge, et $\mathcal{P}$ une subdivision $\delta$-fine. La somme de Riemann

$$S(k, \mathcal{P}) = \sum_{h=1}^{n} |I_h| \cdot k(t_h)$$

est positive ou nulle. Remarquons que cette somme ne change pas si on élimine de la partition $\mathcal{P}$ les intervalles $I_h$ de longueur $|I_h| = 0$.

Considérons un point $x = 1/n$, c'est à dire un point $x$ tel que $k(x) \neq 0$. Il existe au plus deux points de marquage égaux à $x$: puisque $t_h$ appartient à $[x_{h-1}, x_h]$ et $t_{h+1}$ appartient à $[x_h, x_{h+1}]$, on peut avoir $x_h = t_h = t_{h+1}$ mais les autres $x_i$ sont strictement plus grands ou strictement plus petits que $x_h$. D'autre part, la subdivision étant $\delta$-fine, la longueur de $I_h$ ne peut pas dépasser $\delta(t_h)$. On déduit de ces deux remarques (valables pour tous les points $x = 1/n$ avec $n \geq 1$ entier):

$$S(k, \mathcal{P}) = \sum_{h=1}^{n} |I_h| \cdot k(t_h) \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(1/n) \cdot k(1/n) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(1/n) \cdot n.$$

Choisissons maintenant la jauge $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$: on pose

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^{n+1}} & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

de façon à avoir $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(1/n) \cdot n = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$.
On a donc $|S(k, \mathcal{P}) - 0| = S(k, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$, et la fonction $k$ est intégrable d'intégrale nulle.

$\boxed{6}$ Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions intégrables et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, il s'agit de démontrer que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ est intégrable *(sachant, d'après le cours, que si $f$ et $g$ sont intégrables alors $f+g$ et $\lambda f$ sont intégrables, avec $\lambda$ constante).*
C'est vrai pour $n = 1$: si $f_1$ est intégrable alors $\lambda_1 f_1$ est intégrable.
Démontrons que si c'est vrai pour $n$ fonctions, alors c'est vrai aussi pour $n+1$ fonctions. En effet si $f_1, \dots, f_{n+1}$ sont des fonctions intégrables et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels, alors

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n) + (\lambda_{n+1} f_{n+1})$$

est la somme de deux fonctions intégrables, donc elle est intégrable.

$\boxed{7}$ Il s'agit de démontrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas intégrable sur $[0,1]$, en utilisant des fonctions en escalier $g_n$ qui la minorent.
Découpons l'intervalle $[0,1]$ en $n$ intervalles de longueur égale: les $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.
La fonction en escalier $g_n$ sera choisie constante sur chaque intervalle, on lui donne comme valeur le minimum de $f$ sur cet intervalle (donc $g_n$ minore $f$):

$$g_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{k} \quad \text{si } x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

La surface comprise entre l'axe des $x$ et la courbe de $g_n$ est constituée de rectangles de surface $\frac{1}{n}\frac{n}{k} = \frac{1}{k}$ (pour $k = 1, 2, \dots, n$). Donc $\int_0^1 g_n(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et par conséquent $\int_0^1 f(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On sait que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge (ce qui signifie, s'agissant d'une série à termes positifs, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$). Donc $f$ n'est pas intégrable (c'est à dire n'a pas d'intégrale finie).

$\boxed{8}$ (a) On suppose $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, elle est donc uniformément continue. Il s'agit de démontrer le corollaire 4.1 du cours (" $f$ est intégrable, et même Riemann-intégrable"), en utilisant le théorème 4.2.
Découpons l'intervalle $[a,b]$ en $n$ intervalles de longueur égale: les $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, et utilisons les fonctions en escalier $f^-$ et $f^+$ définies comme suit:
quelque soit $x$ dans l'intervalle $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$, $f^-(x)$ ne dépend pas de $x$ et vaut le minimum de $f$ sur cet intervalle; on appelle $m_k$ ce minimum;
quelque soit $x$ dans l'intervalle $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$, $f^+(x)$ ne dépend pas de $x$ et vaut le maximum de $f$ sur cet intervalle; on appelle $M_k$ ce maximum.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est uniformément continue, si on choisit l'entier $n$ assez grand on aura $0 \leq M_k - m_k \leq \varepsilon$ pour tout $k$ et, compte tenu que

$$\int_0^1 f^+ - \int_0^1 f^- = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(b-a)(M_k - m_k),$$

on aura $0 \leq \int_0^1 f^+ - \int_0^1 f^- \leq \frac{1}{n}(b-a)\varepsilon \sum_{k=1}^{n} 1 = (b-a)\varepsilon$.

Le réel $\varepsilon' = (b-a)\varepsilon$ peut être choisi aussi petit qu'on veut, donc d'après le théorème 4.2 on a démontré que $f$ est intégrable.
On prouve que $f$ est Riemann-intégrable, en faisant une démonstration analogue, mais en partant d'une subdivision $\delta$-fine quelconque (rappelons que pour la Riemann-intégrabilité on prend $\delta$ constante). Pour tout $x$ dans le $k^{\text{ième}}$ intervalle, c'est à dire pour tout $x \in I_k$, on aura (si la constante $\delta$ a été choisie assez petite)

$$f(t_k) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(t_k) + \varepsilon$$

d'où on déduit

$$|I_k|(f(t_k) - \varepsilon) \leq \int_{I_k} f(x)\ dx \leq |I_k|(f(t_k) + \varepsilon)$$

et, en faisant la somme pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$S(f, \mathcal{P}) - (b-a)\varepsilon \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq S(f, \mathcal{P}) + (b-a)\varepsilon$$

c'est à dire $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon'$, où $S$ est l'intégrale de $f$. La fonction $f$ est donc intégrable au sens de Riemann.
(b) Démontrons que si $f$ est continue de signe constant, par exemple si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$, alors $f = 0$. Supposons que ce n'est pas le cas; il existe alors $x_0$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme $f$ est continue il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u, v \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ \ f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

et (si on a choisi $\varepsilon$ assez petit) on en déduit $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$ pour tout $x$ dans l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
Ça contredit l'hypothèse $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$, puisque $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ vaut au moins $\displaystyle\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2}\ dx = \alpha f(x_0) > 0$. Il n'existe donc pas de $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, c'est à dire on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

$\boxed{9}$ Si $f$ est continue sur $[a, b]$, elle admet un minimum $m$ et un maximum $M$ et on a

$$\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\ dx.$$

On calcule l'intégrale de gauche et l'intégrale de droite; on obtient

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leq M \\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) &\in [m, M]. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = f(c)$$

et on a donc bien $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c)$.

$\boxed{10}$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée s'il existe une suite $(\varphi_n)$ de fonctions en escalier telle que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n$ (limite uniforme).
(a) Donc, si $f$ est réglée, pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon$ est vérifiée par tout entier $n$ assez grand et tout réel $x \in [a, b]$. Soit $n$ un de ces entiers; on appelle $\psi_\varepsilon$ la fonction $\varphi_n$, elle vérifie donc bien

$$|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,\ \ \forall x \in [a, b].$$

Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier $\psi_\varepsilon$ vérifiant cette condition. Alors la suite de fonctions en escalier $(\psi_{1/n})$ converge uniformément vers $f$ puisque $\big|f(x) - \psi_{1/n}(x)\big| \leq 1/n$, et donc $f$ est réglée.

(b) Soit $f$ continue; on rappelle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\text{si } x, x' \in [a,b] \text{ et } |x - x'| \leq \alpha, \text{ alors } |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Soit une subdivision pointée $\mathcal{P}$ dont les intervalles $I_k$ sont de longueur au plus $\alpha$. On définit une fonction en escalier $\psi_\varepsilon$ en posant que, pour tout $k$ et tout $x \in I_k$,

$$\psi_\varepsilon(x) = f(t_k).$$

Compte tenu que les $x \in I_k$ vérifient $|x - t_k| \leq \alpha$, on a $|f(x) - f(t_k)| \leq \varepsilon$ c'est à dire $|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. La condition de la question (a) est donc vérifiée et $f$ est réglée.

(c) La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = 1/\sqrt{x} \text{ si } x \neq 0.$$

n'est pas réglée. En effet si on appelle $\alpha_1$ la valeur de la fonction en escalier $\psi_\varepsilon$ sur son premier intervalle $I_1 = ]x_0, x_1[ = ]0, x_1[$, l'inégalité $|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ implique $f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon$ (constante), alors que la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ n'est pas bornée par une constante pour $x \in ]0, x_1[$.

(d) Supposons que $f$ est réglée et, étant donné $x_0 \in ]a,b]$, considérons l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0[$ (à gauche de $x_0$); si le réel positif $\alpha$ est choisi assez petit, la fonction en escalier $\psi_\varepsilon$ considérée à la question (a) est constante sur l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0[$. Pour tout $x$ et $x'$ dans cet intervalle on a $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x')$ et par conséquent

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - \psi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(x') - f(x')| \\ &\leq |f(x) - \psi_\varepsilon(x)| + |\psi_\varepsilon(x') - f(x')| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

donc la fonction $f$ (restreinte à l'intervalle $[a, x_0[$) vérifie le critère de Cauchy et par conséquent la limite à gauche $f_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe. On démontre de même que la limite à droite $f_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe (en tout point $x_0 \in [a, b[$).

Réciproquement soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admettant des limites à gauche et des limites à droite en tout point $x$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc des intervalles $]x - \alpha, x + \alpha'[$ tels que
$|f(x') - f_g(x)| \leq \varepsilon$ (pour tout $x' \in ]x - \alpha, x[$),
$|f(x') - f_d(x)| \leq \varepsilon$ (pour tout $x' \in ]x, x + \alpha'[$).
Par compacité, on peut choisir parmi ces intervalles $]x - \alpha, x + \alpha'[$ un nombre fini d'entre eux, qui recouvrent $[a,b]$; on les appelle

$$]x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha'_1[\ ,\ ]x_2 - \alpha_2, x_2 + \alpha'_2[\ ,\ \ldots\ ,\ ]x_n - \alpha_n, x_n + \alpha'_n[.$$

On appelle aussi $y_1, \ldots y_{3n}$ les points $x_k - \alpha_k$, $x_k$ et $x_k + \alpha'_k$ (pour $k = 1, 2, \ldots, n$) rangés dans l'ordre croissant ($y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{3n}$). Chaque intervalle $]y_{k-1}, y_k[$ est sous-intervalle d'un $]x_{k'} - \alpha_{k'}, x_{k'}[$ ou d'un $]x_{k'}, x_{k'} + \alpha'_{k'}[$; on définit la fonction en escalier $\psi_\varepsilon$ en posant

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_g(x_{k'}) & \text{si } x \in ]y_{k-1}, y_k[ = ]x_{k'} - \alpha_{k'}, x_{k'}[ \\ f_d(x_{k'}) & \text{si } x \in ]y_{k-1}, y_k[ = ]x_{k'}, x_{k'} + \alpha'_{k'}[ \end{cases}$$

et si on est dans aucun de ces deux cas, c'est à dire s'il existe $k'$ tel que $x = x_{k'}$ , on pose $\psi_\varepsilon(x) = f(x_{k'})$. La fonction $\psi_\varepsilon$ vérifie bien $|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$ et par conséquent $f$ est réglée.

(e) Une fonction $f$ croissante est réglée parce qu'elle admet en tout $x$ une limite à gauche $f_g(x) = \sup\limits_{x' < x} f(x')$ et une limite à droite $f_d(x) = \inf\limits_{x' > x} f(x')$. De même une fonction $f$ décroissante est réglée.

(f) Une fonction en escalier $\psi$ est bornée parce que
$\inf\limits_{k=1,2,\ldots,n} \alpha_k \leq \psi(x) \leq \sup\limits_{k=1,2,\ldots,n} \alpha_k$ (où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les valeurs de $\psi(x)$ pour $x \in [a,b]$). On en déduit que toute fonction réglée est bornée: d'après la question (a) on a $\psi_\varepsilon(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) + \varepsilon$ donc, en appelant $C$ et $D$ les bornes de la fonction en escalier $\psi_\varepsilon$, on a $C - \varepsilon \leq f(x) \leq D + \varepsilon$.

(g) Soit $f[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Comme la limite à gauche $f_g(x)$ et la limite à droite $f_d(x)$ existent pour tout $x \in [a,b]$, on peut caractériser les points de discontinuité de $f$ en disant que ce sont les points $x$ tels que $f_g(x) \neq f_d(x)$. On peut aussi numéroter ces points:

soient $x_1, \dots, x_{n_1}$ les points pour lesquels on a $|f_d(x) - f_g(x)| \geq 1$ ,
$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}$ les points pour lesquels on a $1 > |f_d(x) - f_g(x)| \geq \frac{1}{2}$ ,
...
$x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}$ les points pour lesquels on a $\frac{1}{k-1} > |f_d(x) - f_g(x)| \geq \frac{1}{k}$ ,
...
On obtient ainsi tous les points de discontinuité, leur ensemble est donc au plus dénombrable.

$\boxed{11}$ Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt.$$

(a) Comme $f$ est continue en 0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\text{si } |x - 0| \leq \alpha \text{ alors } |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in ]0, \alpha[$ on a donc $f(0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon$ et, en intégrant,

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\int_0^x (f(0)-\varepsilon)\ dx & \leq & \displaystyle\int_0^x f(x)\ dx & \leq & \displaystyle\int_0^x (f(0)+\varepsilon)\ dx \\ x(f(0)-\varepsilon) & \leq & \displaystyle\int_0^x f(x)\ dx & \leq & x(f(0)+\varepsilon) \\ f(0)-\varepsilon & \leq & \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt & \leq & f(0)+\varepsilon. \end{array}$$

Ceci équivaut à $|g(x) - f(0)| \leq \varepsilon$, et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$. On prolonge $g$ en une fonction continue en tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $g(0) = f(0)$.

(b) Si $f$ est périodique, $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $T$ constante strictement positive. Soient $m$ le minimum de $f(x)$, et $M$ le maximum de $f(x)$, pour $x \in [0, T]$; comme $f$ est périodique, c'est aussi le minimum et le maximum de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On considère un réel strictement positif $x$, et l'entier $n$ tel que

$$nT \leq x < (n+1)T. \tag{$**$}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\ dt &= \int_0^{nT} f(t)\ dt + \int_{nT}^x f(t)\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)\ dt + \int_{nT}^x f(t)\ dt \\ &= n\int_0^T f(t)\ dt + \int_{nT}^x f(t)\ dt \end{aligned}$$

(parce que l'intégrale de $(k-1)T$ à $kT$ est égale, par changement de variable, à l'intégrale de 0 à $T$). En divisant par $x$ on en déduit

$$g(x) = \frac{n}{x}\int_0^T f(t)\ dt + \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\ dt. \tag{$***$}$$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, le rapport $\frac{n}{x}$ tend vers $\frac{1}{T}$ (parce que, d'après $(**)$, $\frac{n}{x} \leq \frac{1}{T} < \frac{n}{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{T} - \frac{1}{x} < \frac{n}{x} \leq \frac{1}{T}$). D'autre part $\frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\ dt$ tend vers 0 parce qu'il est compris entre $\frac{Tm}{x}$ et $\frac{TM}{x}$. On déduit alors de (***)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt.$$