

Corrigé du partiel de mathématiques

1 Questions de cours et question courte

Des questions 1 à 3, dire Vrai ou Faux et justifier rapidement chaque réponse ! Pour la question 4, on détaillera les calculs.

1) a) (0,5 pts pour la justification) Une droite vectorielle D est définie par un vecteur directeur $\vec{u}$?

(0,5 pts pour la justification) $\vec{u}$ peut être le vecteur nul ?

Réponse : Elle est définie par un vecteur directeur $\vec{u}$ mais $\vec{u}$ ne peut pas être le vecteur nul (s'il l'était tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ seraient nuls).

b) (0,5 pts pour la justification) Si $\vec{u}$ est non nul, c'est une base de D ?

Réponse : Oui.

c) (0,5 pts pour la justification) Le vecteur nul appartient à D ?

Réponse : Oui.

d) Soit $F = Vect(\vec{a})$:

$$\vec{a} = (2, -1, 3)$$

Soit $\vec{u} = (4, -2, 6)$:

(0,5 pts pour la justification) $\vec{u}$ appartient à F ?

Soit $\vec{v} = (2, -1, 0)$:

(0,5 pts pour la justification) $\vec{v}$ appartient à F ?

Réponse : $\vec{u}$ appartient à F car colinéaire à $\vec{a}$, mais $\vec{v}$ n'appartient pas à F .

2) (0,5 pts pour la justification) Tout couple de vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel P est une base de P ?

Réponse : Oui.

3) a) (0,5 pts pour la justification) Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ peut contenir 2 vecteurs ?

Réponse : Oui (deux vecteurs non colinéaires).

b) (0,5 pts pour la justification) Une base de $\mathbb{R}^3$ peut contenir 4 vecteurs ?

Réponse : Non, quatre vecteurs sont toujours liés.

4) Dans $\mathbb{R}^3$

a) Soit P l'ensemble des vecteurs (x, y, z) tels que :

$$x = s - t, y = 3t, z = s - t$$

s et t réels quelconques

(0,5 pts pour la justification) P est-il un plan vectoriel ? une droite vectorielle ?

(1 pt) Donner 2 vecteurs directeurs de P et un vecteur normal à P .

Réponse : C'est la droite de vecteurs directeurs $(1, 0, 1)$ et $(-1, 3, -1)$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, c'est à dire $(-3, 0, 3)$, est normal à P .

b) (1 pt) Déterminer une équation cartésienne de P

Réponse : $x - z = 0$.

2 Courbes

a) Étudier la courbe paramétrée :

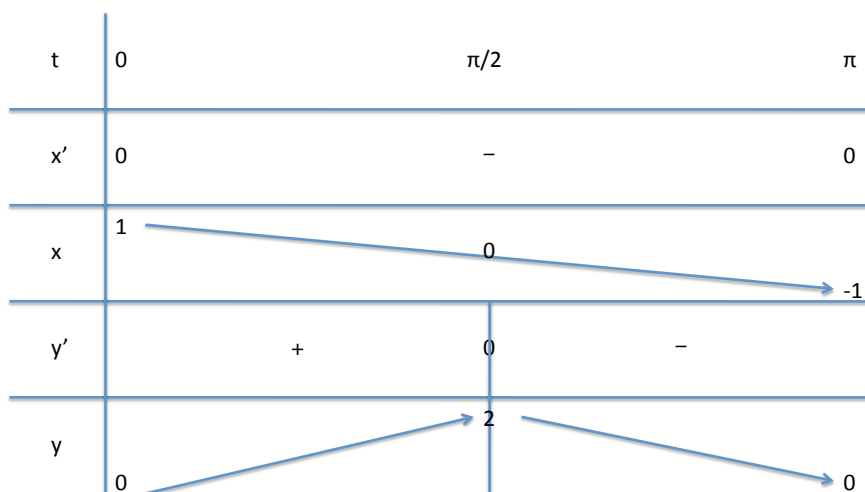
$$x(t) = \cos t, y(t) = 2 \sin t.$$

Plus précisément, on demande de :

- (0,5 pt) Définir un ensemble d'étude ;

- (1,5 pts) Faire le tableau de variations de $x(t)$ et $y(t)$.

Réponse : Étudions-la sur $[0; \pi]$. On a $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = 2 \cos t$.



b) (0,5 pt) En déduire que la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ possède deux tangentes parallèles à l'axe des x et deux tangentes parallèles à l'axe des y .

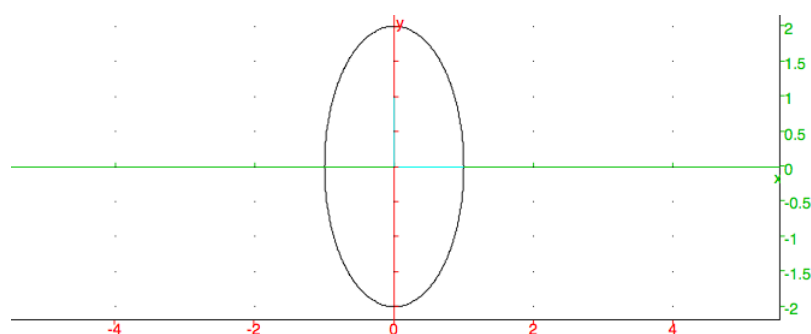
Réponse : En $t = \frac{\pi}{2}$ (c'est à dire au point $(x, y) = (0, 2)$), l'ordonnée $y(t)$ est maximale donc la tangente est parallèle à l'axe des x . De même qu'en $t = -\frac{\pi}{2}$ par symétrie.

En $t = 0$, l'abscisse $x(t)$ est maximale donc la tangente est parallèle à l'axe des y .

En $t = \pi$, l'abscisse $x(t)$ est minimale donc la tangente est parallèle à l'axe des y .

c) (0,5 pt) Tracer cette courbe.

Réponse :



d) (1 pt) Donner une équation cartésienne de cette courbe ; quelle est cette courbe ?

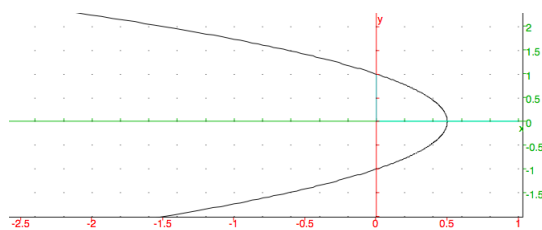
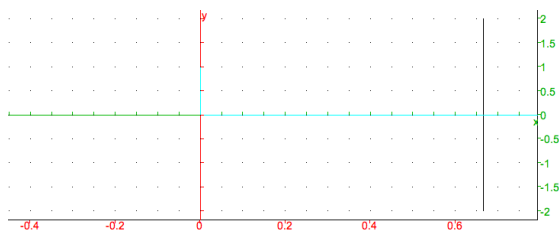
Réponse : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ c'est donc une ellipse.

e) Reconaitre et tracer les courbes d'équation polaire (1 pt)

(1 pt) $\rho = \frac{2}{3 \cos \theta}$.

(3 pts) $\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$.

Réponse : Droite $x = \frac{2}{3}$ et parabole $x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.



3 Matrice, calcul vectoriel

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'application linéaire de E dans F associée dans les bases canoniques ;

a) (0,5 pt) Quels sont les ensembles E et F ?

Réponse : $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) (1,5 pts) Quelles sont les images par f des vecteurs :

$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 5, 1)$, (x, y, z) ?

Réponse : $(2, 1)$, $(-1, 0)$, $(3, -1)$, $(0, 0)$, $(2x - y + 3z, x - z)$.

c) (3 pts) Déterminer le noyau $\text{Ker} A$ et le définir précisément.

$\text{Ker} A$ est-il un plan vectoriel ? une droite vectorielle ? Déterminer une base de $\text{Ker} A$.

Réponse : $\text{Ker} A$, ensemble des vecteurs X tels que $AX = 0$, est la droite vectorielle d'équation cartésienne

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

L'équation paramétrique de $\text{Ker} A$ est (par exemple) $\begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$ et son vecteur de base est $(1, 5, 1)$.