

Corrigé du test 6

1) La fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < a \\ 2x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

Soit $x_0 < a$. Expliquer (en français) pourquoi cette fonction est continue en x_0 . Même question si $x_0 > a$.
(sur 2 pts)

Réponse: On rappelle que les fonctions usuelles et leurs composées sont continues sur leur domaine de définition.

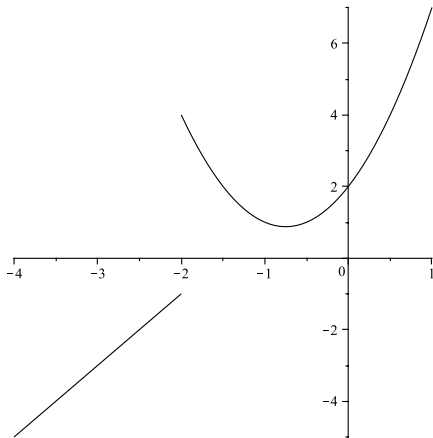
Soit $x_0 < a$. Les fonctions $f(x)$ et $2x + 3$ sont égales au voisinage de x_0 . La deuxième étant continue en x_0 , la première l'est aussi.

Soit $x_0 > a$. Les fonctions $f(x)$ et $2x^2 + 3x + 2$ sont égales au voisinage de x_0 . La deuxième étant continue en x_0 , la première l'est aussi.

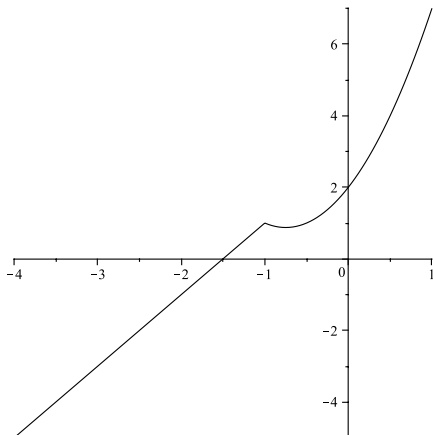
2) Comment faut-il choisir a pour que f soit aussi continue en $x_0 = a$? (utiliser la limite à gauche et la limite à droite) (sur 2 pts)

Réponse: Si $x_0 = a$, alors $f(x)$ est égal à $2x + 3$ à gauche de x_0 et à $2x^2 + 3x + 2$ à droite de x_0 . Quand x tend vers $x_0 = a$, la limite à gauche de $f(x)$ sera donc $2a + 3$ et sa limite à droite $2a^2 + 3a + 2$. Elles sont égales si et seulement si $2x^2 + 3x + 2 = 2a + 3$ c'est à dire $a = -1$ ou $\frac{1}{2}$.

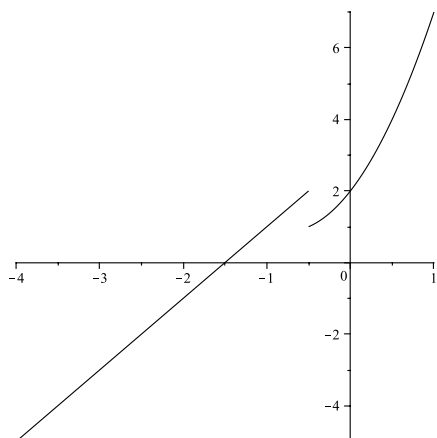
Illustration: Sur le premier graphe on a pris $a = -2$; c'est trop petit, les courbes ne se raccordent pas et f est discontinue:



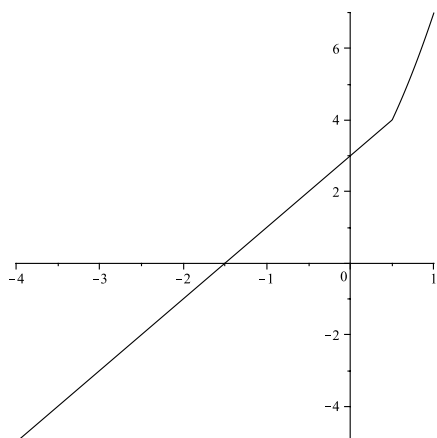
Sur le deuxième $a = -1$ et cette fois f est continue:



Sur le troisième $a = -\frac{1}{2}$, f discontinue:



Sur le quatrième $a = \frac{1}{2}$, f continue:



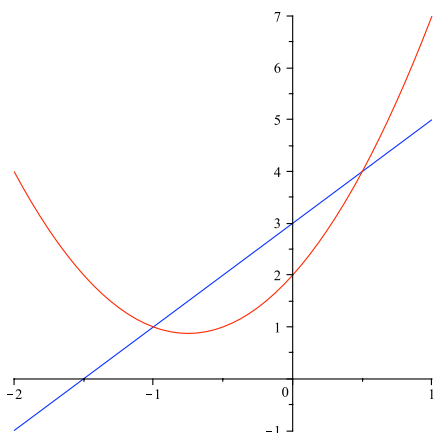
3) Quel que soit le choix de a , démontrer que f n'est pas dérivable en $x_0 = a$. (sur 2 pts)

Réponse: D'abord si a n'est ni -1 ni $\frac{1}{2}$, la fonction n'est pas continue d'après la question précédente donc elle n'est pas dérivable (rappel: toute fonction dérivable est continue, et toute fonction discontinue est non dérivable).

Ensuite si a vaut -1 ou $\frac{1}{2}$, on calcule la dérivée à gauche de a (qui est celle de $2x + 3$) et sa dérivée à droite (qui est celle de $2x^2 + 3x + 2$) puis on constate qu'elles sont différentes (après avoir remplacé a par sa valeur qui est -1 ou $\frac{1}{2}$).

4) Faire l'étude des fonctions $g(x) = 2x + 3$ et $h(x) = 2x^2 + 3x + 2$, et représenter sur un même dessin leurs courbes. (sur 2 pts)

Réponse:



5) Expliquer, géométriquement et sans calcul, quelle propriété doit vérifier la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour que la fonction

$$f_1(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < a \\ 2x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

soit continue et dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. (sur 2 pts)

Réponse: Il faut qu'elle soit tangente à la parabole d'équation $y = 2x^2 + 3x + 2$ au point d'abscisse a , parce que si la droite rencontre la parabole sans qu'elle soit tangente au point de rencontre, la dérivée à gauche différerait de la dérivée à droite.

6) La fonction f_2 est définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Vérifier que 6 appartient à l'intervalle $[f_2(0); f_2(2)]$ mais qu'il n'existe pas de réel x tel que $f_2(x) = 6$. (sur 2 pts)

Réponse: $[f_2(0); f_2(2)] = [3; 16]$ mais pour $x < 1$ on a $f_2(x) = 2x + 3 < 2 + 3 = 5$ et pour $x \geq 1$ on a $f_2(x) = 2x^2 + 3x + 2 \geq 2 + 3 + 2 = 7$ et par conséquent $f_2(x)$ n'atteint jamais la valeur 6 (rappel: une fonction $f(x)$, avec $x \in [a; b]$, atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ si elle est continue, mais ici ce n'est pas le cas de la fonction discontinue f_2).