Étude des variations d'une fonction

On considère l'application $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - x$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On se propose d'étudier les variations de l'application $\phi : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(x) = f(\sin(x)) = \frac{\sin^3 x}{3} - 2\sin^2 x - \sin x.$$

QUESTION 1

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \boxed{x^2 - 4x - 1}$.

Le signe de $f'(x)$ est $\boxed{négatif}$ pour $x \in [0; 1]$.

Rappeler la formule de dérivation des fonctions composées: $(f \circ g)'(x) = \boxed{f' \circ g(x) g'(x)}$.

D'après cette formule, $\phi'(x) = \boxed{(\sin^2 x - 4\sin x - 1)\cos x}$.

QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction ϕ:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-8}{3}$	$\nearrow$	0

Étude des variations d'une fonction

On pose $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ pour tout x réel pour lequel cela a un sens. On se propose d'étudier les variations de l'application

$$x \mapsto \phi(x) = f(e^x) = \sqrt{e^x(1-e^x)}$$

sur le domaine de $\mathbb{R}$ où $\phi(x)$ est bien définie.

QUESTION 1

La fonction f est définie sur $\boxed{[0;1]}$ et la fonction ϕ sur $\boxed{]-\infty;0]}$.

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \boxed{\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}}$ pour tout $x \in \boxed{]0;1[}$.

Donc, par la formule de dérivation des fonctions composées, $\phi'(x) = \boxed{\frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}}$

pour tout $x \in \boxed{]-\infty;0[}$.

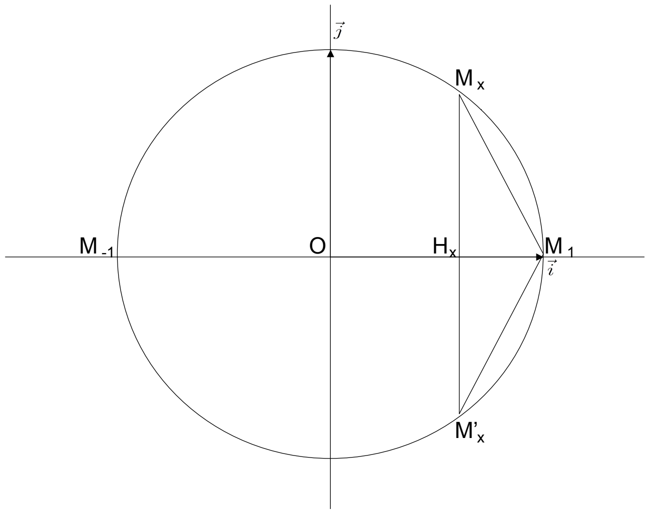
QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction ϕ:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Analyse des fonctions appliquée à l'optimisation

Le plan est rapporté au repère othonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Pour tout $-1 \leq x \leq 1$, on note M_x (resp M'_x) le point du cercle trigonométrique d'abscisse x et d'ordonnée positive (resp. négative). Par définition $f(x)$ est l'aire du triangle $M_1M_xM'_x$.



QUESTION

Pour tout $-1 \leq x \leq 1$, exprimer $f(x)$ en fonction de H_xM_1 et de H_xM_x:

$f(x) = \boxed{H_xM_1 \cdot H_xM_x}$

puis, en fonction de x:

$f(x) = \boxed{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Calculer $f'(x)$ et le mettre sous la forme $\dfrac{(ax+b)(cx+d)}{\sqrt{1-x^2}}$:

$f'(x) = \boxed{\frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Remplir le tableau de variations de la fonction f:

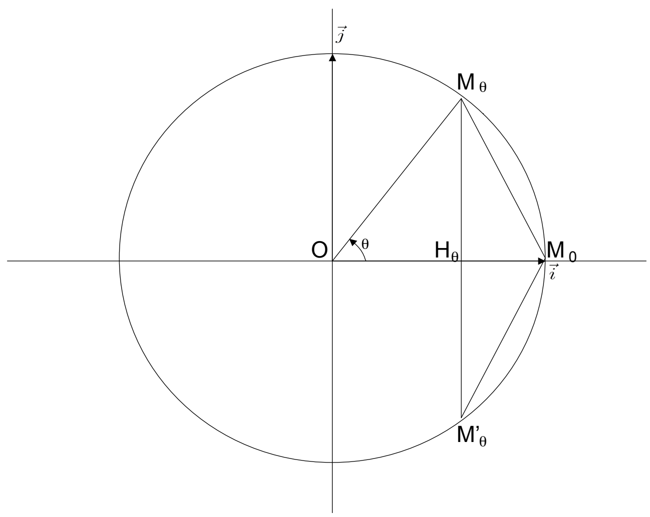
x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

L'aire du triangle est donc maximale quand H_x est le milieu du segment $\boxed{M_{-1}0}$,

et elle vaut $\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Analyse des fonctions appliquée à l'optimisation

Le plan est rapporté au repère othonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Pour tout $0 \leq \theta \leq \pi$, on note M_θ (resp M'_θ) le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$ (resp. $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM'_\theta}) = -\theta$) modulo 2π. Par définition $\varphi(\theta)$ est l'aire du triangle $M_0M_\theta M'_\theta$.



QUESTION

Pour tout $\theta \in [0\,;\pi]$, exprimer $\varphi(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$\varphi(\theta) = \boxed{(1-\cos\theta)\sin\theta}$.

Calculer $\varphi'(\theta)$ et le mettre sous la forme d'un polynôme en $\cos\theta$:

$\varphi'(\theta) = \boxed{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}$.

$\varphi'(\theta)$ s'annule pour $\cos\theta = \boxed{-\frac{1}{2}}$, c'est dire pour $\theta = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

Remplir le tableau de variations de la fonction φ:

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

L'aire du triangle est donc maximale quand $\theta = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$,

et cette aire vaut $\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Caractérisation d'une fonction classique I

On cherche à déterminer toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant les trois conditions suivantes:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = f(a)f(b); \\ (2) & \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1; \\ (3) & f(0) = 1. \end{array}$$

On se propose de démontrer que f est nécessairement dérivable en tout point, et de trouver une expression de $f(x)$ (on pourra utiliser les résultats sur les équations différentielles linéaires du premier ordre).

QUESTION 1

Soient x_0 et x deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. En posant $a = x_0$ et $b = x - x_0$ et en utilisant l'hypothèse (1), exprimer $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de a, b et f:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\frac{f(a)f(b)-f(a)}{b}}\ .$$

Avec l'hypothèse (2), on en déduit $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{f(x_0)}$.

f est donc solution de l'équation différentielle $\boxed{y' = y}$

dont la solution générale est $\boxed{y = Ce^x}$ (avec C constante).

Compte tenu de l'hypothèse (3), $C = \boxed{1}$ et $f(x) = \boxed{e^x}$.

Caractérisation d'une fonction classique II

On cherche à déterminer toutes les applications f définies sur $]0;+\infty[$ et satisfaisant les trois conditions suivantes:

$$\begin{array}{ll}(1) & \forall a,b \in]0;+\infty[,\ \ f(ab) = f(a)+f(b);\\ (2) & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x)}{x} = 1;\\ (3) & f(1) = 0.\end{array}$$

On se propose de démontrer qu'alors f est nécessairement dérivable en tout point $x \in\ ]0;+\infty[$, et de trouver une expression de $f(x)$.

QUESTION 1

Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]0;+\infty[$. En posant $a = x_0$ et $b = \dfrac{x - x_0}{x_0}$ et en utilisant l'hypothèse (1), exprimer $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de a, b et f:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\tfrac{f(a)+f(1+b)-f(a)}{ab}}\ .$$

Avec l'hypothèse (2), on en déduit $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\tfrac{1}{a}}$,

d'où l'existence de $f'(x_0) = \boxed{\tfrac{1}{x_0}}$ (en fonction de x_0).

On a donc $f'(x) = \boxed{\tfrac{1}{x}}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, d'où on déduit

$f(x) = \boxed{\ln x}\ +C$ (avec C constante).

Compte tenu de l'hypothèse (3), $C = \boxed{0}$ et

$f(x) = \boxed{\ln x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.