Calculs de trigonométrie I

Étant donné un nombre réel θ, on note

$$A = \sin\theta + \cos\theta.$$

On se propose d'exprimer les quantités

$$B = \sin\theta\cos\theta \quad \text{et} \quad C = \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

en fonction de A.

QUESTION

Calculer A^2 en fonction de B:

$A^2 = \boxed{1 + 2B}$,

et en déduire B en fonction de A:

$B = \boxed{\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}}$.

$C + 2B^2$ est le carré de $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$.

On en déduit C en fonction de B:

$C = \boxed{1 - 2B^2}$,

puis C en fonction de A:

$C = \boxed{\frac{1}{2} + A^2 - \frac{A^4}{2}}$.

Calculs de trigonométrie II

Étant donné un nombre réel θ, on note $A = \sin\theta + \cos\theta$ et on pose successivement

$B = \sin\theta\cos\theta$; $C = (\sin\theta - \cos\theta)^2$; $D = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^3\theta - \cos^3\theta)$; $E = \sin^5\theta + \cos^5\theta$.

On se propose d'exprimer les quantités B, C, D, E en fonction de A.

QUESTION 1

D'après l'exercice précédent, $B = \boxed{\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}}$.

Calculer C en fonction de B:

$C = \boxed{1 - 2B}$,

et en déduire C en fonction de A:

$C = \boxed{2 - A^2}$.

QUESTION 2

Factoriser $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ et $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ par $\sin\theta - \cos\theta$:

$\sin^2\theta - \cos^2\theta = \boxed{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$ et $\sin^3\theta - \cos^3\theta = \boxed{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}$.

En déduire D en fonction de A, B, C:

$D = \boxed{CA(1 + B)}$,

puis D en fonction de A:

$D = \boxed{(2 - A^2)A\left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{2}\right)}$.

QUESTION 3

Développer D de façon à l'exprimer en fonction de E, A, B:

$D = \boxed{E - AB^2}$.

En déduire

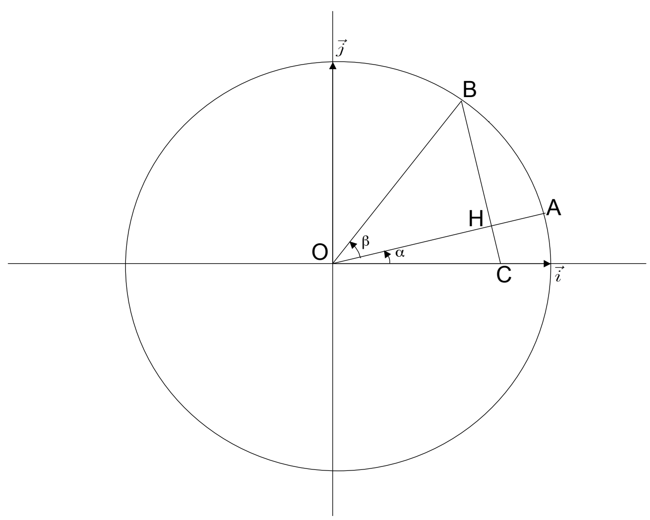
$E = \boxed{A\left(\frac{A^4}{4} - \frac{A^2}{2} + \frac{1}{4}\right) + D}$ (en fonction de A, D), puis $E = \boxed{\frac{5A - A^5}{4}}$ (en fonction de A).

Sinus de la somme de deux angles

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs tels que $0 < \alpha + \beta < \pi/2$. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note A et B les points du cercle trigonométrique tels que

$$(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA}) = \alpha \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \beta \pmod{2\pi}$$

Soit H la projection orthogonale de B sur la droite (OA) et C le point d'intersection de (BH) avec l'axe des abscisses (voir figure ci-dessous).



NB : Dans cet exercice, on notera $\mathcal{A}(MNP)$ l'aire du triangle déterminé par les trois points M, N, et P.

Questions 1 et 2 – Donner les réponses en fonction de α et β.

Question 3 – Compléter le raisonnement permettant d'exprimer $\sin(\alpha + \beta)$ en fonction des sinus et cosinus de α et β.

QUESTION 1

Comme $\dfrac{OB}{OH} = \boxed{\frac{1}{\cos\beta}}$ et $\dfrac{OC}{OH} = \boxed{\frac{1}{\cos\alpha}}$,

on tire : $OH = \boxed{OC\cos\alpha}$ et $OC = \boxed{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}}$,

donc $\mathcal{A}(OBC) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\beta)}$. (1)

QUESTION 2

D'une part, $\mathcal{A}(OHB) = \boxed{\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta}$. (2)

D'autre part $\dfrac{HC}{OH} = \boxed{\tan\alpha}$, d'où $HC = \boxed{\cos\beta\tan\alpha}$.

Finalement $\mathcal{A}(OHC) = \boxed{\frac{1}{2}\cos^2\beta\tan\alpha}$. (3)

QUESTION 3

Du fait que $\mathcal{A}(OHB) + \mathcal{A}(OHC) = \mathcal{A}\Big(\ \boxed{OBC}\ \Big)$,

on déduit de (1), (2) et (3) que

$\sin(\alpha+\beta) = \boxed{\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha}$.

Calcul de trigonométrie III

Étant donné θ un nombre réel, on se propose de linéariser $\cos^3\theta$ (c'est à dire, exprimer $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, pour $n = 1, 2, \ldots$) de deux manières différentes.

Question 1 – En développant $\cos 3\theta$ (à l'aide de la formule du cosinus de la somme).

Question 2 – En utilisant les nombres complexes (formules d'Euler).

QUESTION 1

On a : $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \boxed{\cos\theta\cos(2\theta) - \sin\theta\sin(2\theta)}$,

d'où : $\cos 3\theta = \boxed{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin^2\theta\cos\theta}$ (en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$)

soit : $\cos 3\theta = \boxed{\cos\theta(4\cos^2\theta - 3)}$ (en fonction de $\cos\theta$ uniquement),

d'où on tire $\cos^3\theta = \boxed{\frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right)}$.

QUESTION 2

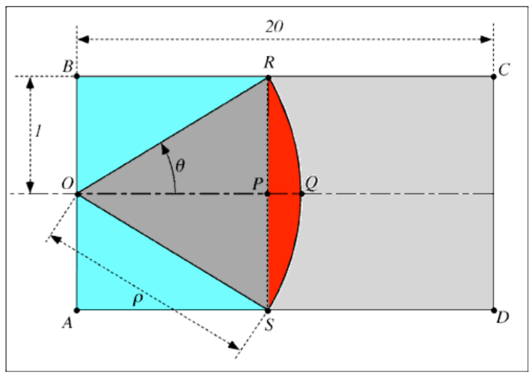
Par les formules d'Euler, $\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}\left(\boxed{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)^3$

et, en développant, $\cos^3\theta = \boxed{\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right)}$.

En utilisant à nouveau les formules d'Euler, $\cos^3\theta = \boxed{\frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right)}$.

Relations métriques dans le triangle

L'unité de longueur du plan étant fixée, on considère un rectangle $ABCD$ de largeur $AB = 2$ et de longueur $BC = 20$. Soit O le milieu du segment AB. Si ρ est un nombre réel compris entre 1 et $\sqrt{20^2 + 1^2}$, le cercle de centre O et de rayon ρ coupe le segment BC en un point R et le segment AD en un point S.



On note $\overset{\frown}{ORQS}$ le secteur du disque de centre O et de rayon ρ, délimité par les segments OR et OS. On note aussi $\overset{\frown}{PRQS}$ la portion de ce disque délimitée par le segment RS et l'arc de cercle $\overset{\frown}{RQS}$. Dans cet exercice, on s'intéresse à la portion du rectangle $ABCD$ qui est à gauche de l'arc $\overset{\frown}{RQS}$, soit

$$\Sigma = ABRS + \overset{\frown}{PRQS}.$$

On notera aussi $\theta = (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$, de sorte que dans le triangle rectangle OPR on a la relation

$$\sin\theta = \frac{1}{\rho}.$$

Notation – Étant donnée χ une portion du plan, on note $\mathcal{A}(\chi)$ l'aire de χ; ainsi, par exemple, $\mathcal{A}(ABCD) = 40$ unités d'aire.

Question 1 – Trouver une expression de $\mathcal{A}(\Sigma)$ en fonction de θ seul.

Question 2 – On se propose de trouver une valeur de ρ pour laquelle Σ couvre à peu près la moitié du rectangle $ABCD$.

QUESTION 1

Comme $OP = \boxed{\rho\cos\theta}$ (en fonction de ρ et θ), il vient

$$\mathcal{A}(ABRS) = \boxed{2\rho\cos\theta} \ . \tag{1}$$

D'autre part, $\mathcal{A}(OR\overset{\frown}{QS}\ ) = \boxed{\rho^2\theta}$ et $\mathcal{A}(ORS) = \boxed{\rho\cos\theta}$ donc

$$\mathcal{A}(PR\overset{\frown}{QS}\ ) = \boxed{\rho^2\theta - \rho\cos\theta}. \tag{2}$$

On déduit de (1) et (2) que $\mathcal{A}(\Sigma) = \boxed{\rho^2\theta + \rho\cos\theta}$ (en fonction de ρ et θ)

et, comme $\rho = \boxed{\frac{1}{\sin\theta}}$ (en fonction de θ), $\mathcal{A}(\Sigma) = \boxed{\frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$.

QUESTION 2

En utilisant les approximations $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \theta$, l'équation $\mathcal{A}(\Sigma) = 20$ devient:

$\boxed{\frac{2}{\theta}} \simeq 20$, d'où on tire $\theta \simeq \boxed{\frac{1}{10}}$.

Pour cette valeur de θ (en radians) la calculette donne

$\cos\theta \simeq \boxed{0,995}$ et $\sin\theta \simeq \boxed{0,099833}$,

donc $\mathcal{A}(\Sigma) \simeq \boxed{20,0001}$ et $\rho \simeq \boxed{10,017}$.