Calcul d'intégrales

QUESTION 1

$$\int_1^4 (x^2 - 2x + 1)\ dx = \boxed{9}\ .$$

$$\int_{-1}^1 x(1 - x^2)\ dx = \boxed{0}\ .$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x+1)^2} = \boxed{\tfrac{1}{4}}\ .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \boxed{\sqrt{3} - 1}\ .$$

QUESTION 2

$$\int_1^4 \frac{dx}{2x} = \boxed{\ln 2}\ .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \boxed{\tfrac{\ln 3}{2}}\ .$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ dx}{1+x^2} = \boxed{\ln 2}\ .$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\ dx = \boxed{\ln 2}\ .$$

QUESTION 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x)\ dx\ \boxed{\tfrac{1}{4}}\ .$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)\ dx = \boxed{3\sin\left(\tfrac{13\pi}{18}\right) - 3}\ .$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ dx = \boxed{\tfrac{1}{2}}\ .$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\ dx = \boxed{\tfrac{5}{2}}\ .$$

Calcul d'intégrales

On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx, \quad B + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \quad \text{et} \quad C = \sqrt{1+x^2}\, dx\ .$$

Question 1 – Calculer $A+B$ en fonction de C, puis calculer $B+C$.

Question 2 – On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0;1]$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Calculez la dérivée f' de f et en déduire, successivement, les valeurs de A, B et C.

QUESTION 1

On simplifie $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \boxed{\sqrt{1+x^2}}$, d'où $A+B = \boxed{C}$.

D'autre part $\sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ est la dérivée d'un produit uv, avec

$u = x$ et $v = \boxed{\sqrt{1+x^2}}$,

donc $B + C = \displaystyle\int_0^1 (uv)'\, dx = \boxed{\sqrt{2}}$.

QUESTION 2

On calcule $f'(x) = \boxed{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}$,

puis on simplifie le numérateur et le dénominateur de la fraction obtenue, par $x+\sqrt{1+x^2}$, ce qui donne

$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

Ceci permet de calculer $A = \boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

et, en utilisant les résultats de la question précédente,

$B = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$ et $C = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$.

Pratique de l'intégration par parties

Étant donnés deux nombres réels a et b, on considre les intégrales

$$A = \int_a^b e^x \ \cos x \ dx \quad \text{et} \quad B = \int_a^b e^x \ \sin x \ dx \ .$$

On se propose de calculer A et B l'aide d'intégrations par parties (**Question 1**). Des calculs d'application sont proposés la **Question 2**.

QUESTION 1

En intégrant par parties avec $u' = e^x$ et $v = \cos x$ on obtient

$$A = \Big[\boxed{e^x \ \cos x} \Big]_a^b - \int_a^b \boxed{e^x \ (-\sin x)} \ . \tag{1}$$

En intégrant par parties avec $u' = \cos x$ et $v = e^x$ on obtient

$$A = \Big[\boxed{e^x \ \sin x} \Big]_a^b - \int_a^b \boxed{e^x \ \sin x} \ . \tag{2}$$

De (1) et (2) on tire $A = \boxed{e^b \frac{\cos b + \sin b}{2} - e^a \frac{\cos a + \sin a}{2}}$, mais aussi $B = \boxed{e^b \frac{\sin b - \cos b}{2} - e^a \frac{\sin a - \cos a}{2}}$.

QUESTION 2

En utilisant les résultats de la question précédente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \ \sin x \ dx = \boxed{\tfrac{1}{2}} \ ,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \ \cos x \ dx = \boxed{\tfrac{1}{2}} \ ,$$

$$\int_0^x e^t \ \sin t \ dt = \boxed{e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{1}{2}} \ .$$