Université de Provence
Semestre 1

Licence Mathématiques et Informatique
Planche 11

Mathematiques generales 1
Planche 11 : Equations différentielles d'ordre un

Correction

Exercice 1 La solution de l'équation différentielle $x'(t) = 3x(t)$ avec $x(0) = 3$ est $x(t) = 3e^{3t}$.

Exercice 2 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(t) = -5f'(t)$ pour tout t. Le fait que la courbe représentant f dans le repère orthonormé passe par le point C se traduit par $f(-2) = 1$. La fonction f s'écrit donc $f(t) = e^{-\frac{1}{5}(t+2)}$ et la courbe est la suivante :

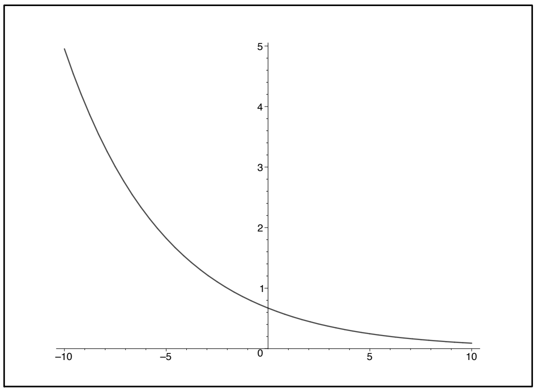

FIG. 1 – Solution de $f(t) = -5f'(t)$ passant par $(-2, 1)$.

Exercice 3

a) La solution générale de l'équation différentielle homogène :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad (e),$$

s'écrit :

$$y_h(t) = k\ \exp(-\int a(t)dt),$$

oú $k \in \mathbb{R}$ et $\int a(t)dt$ représente une primitive de la fonction $a(t)$.

b) Soit y_p une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

Montrons que toute solution de (E) se met sous la forme $y = y_p + y_h$: Soit y solution de (E) alors on a :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

et comme y_p est une solution particulière de (E) on a :

$$y_p'(t) + a(t)y_p(t) = b(t)$$

donc la fonction g définie par $g(t) = y(t) - y_p(t)$ est telle que :

$$g'(t)+a(t)g(t) = y'(t)-y_p'(t)+a(t)(y(t)-y_p(t)) = y'(t)+a(t)y(t)-(y_p'(t)+a(t)y_p(t)) = b(t)-b(t).$$

Autrement dit la fonction g est une solution de l'équation homogène, i.e. $g = y_h$. Donc toute solution de (E) s'écrit :

$$y(t) = y_p(t) + k\ \exp(-\int a(t)dt).$$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) $y'(t) - 2ty(t) = t$ et l'équation sans second membre associée : (e) $y'(t) - 2ty(t) = 0$.

a) On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C$.
On a $y_p'(t) - 2ty_p(t) = 0 - 2tC = t$, d'où $C = -\frac{1}{2}$ et $y_p(t) = -\frac{1}{2}$.

b) La solution générale de l'équation homogène (e) s'écrit :

$$y_h(t) = kexp(-\int -2tdt) = ke^{t^2}.$$

Si l'on fait varier la constante k, autrement dit si on pose $y_p(t) = k(t)e^{t^2}$, on a alors : $y_p'(t) = 2tk(t)e^{t^2} + k'(t)e^{t^2}$. Donc $y_p'(t) - 2ty_p(t) = k'(t)e^{t^2}$ et l'équation différentielle sera vérifiée si $k'(t)e^{t^2} = t$. C'est-à dire si $k(t) = \int te^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2}$. La solution particulière s'écrit donc :

$$y_p(t) = k(t)e^{t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2}e^{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

c) Comme nous venons de le voir la solution générale de l'équation homogène (e) s'écrit :

$$y_h(t) = kexp(-\int -2tdt) = ke^{t^2}.$$

Donc toutes les solutions de (E) s'écrivent :

$$y(t) = -\frac{1}{2} + ke^{t^2}.$$

Exercice 5 On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = \cos(t)$, et l'équation sans second membre associée (e) $y' + y = 0$.

a) On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. On a

$$y_p'(t) + y_p(t) = -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(t) + b\sin(t) = (a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t).$$

Donc $y_p'(t) + y_p(t) = \cos(t)$ si et seulement si $a + b = 1$ et $b - a = 0$. Soit $a = b = \frac{1}{2}$. On obtient :

$$y_p(t) = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{2}.$$

b) La solution générale de l'équation homogène (e) s'écrit :

$$y_h(t) = kexp(-\int dt) = ke^{-t}.$$

c) On en déduit que toutes les solutions de (E) s'écrivent :

$$y(t) = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{2} + ke^{-t}.$$

Exercice 6

a) On cherche une solution particulière g de la forme $g(t) = ae^{-t}$.
On a $g'(t) + 3g(t) = -ae^{-t} + 3ae^{-t} = 2ae^{-t}$ donc $g'(t) + 3g(t) = 2e^{-t}$ si et seulement si $a = 1$.
La solution particulière s'écrit donc :

$$g(t) = e^{-t}.$$

Si on applique la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière g sous la forme $g(t) = k(t)e^{-3t}$, d'où $g'(t) = -3k(t)e^{-3t} + k'(t)e^{-3t}$ et $g'(t) + 3g(t) = k'(t)e^{-3t}$. Donc g sera une solution de l'équation différentielle si $k'(t)e^{-3t} = 2e^{-t}$. C'est à dire si :

$$k(t) = \int e^{3t}2e^{-t}dt = \int 2e^{2t}dt = e^{2t}.$$

Donc

$$g(t) = k(t)e^{-3t} = e^{2t}e^{-3t} = e^{-t}.$$

b) La solution générale de l'équation différentielle homogène s'écrit :

$$y_h(t) = kexp(-\int 3dt) = ke^{-3t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t},$$

s'écrit

$$y(t) = e^{-t} + ke^{-3t},$$

et si on impose $y(0) = 1$ on obtient $y(0) = e^{-0} + ke^{-3(0)} = 1 + k = 0$ soit $k = 0$. La solution cherchée est donc :

$$y(t) = e^{-t}.$$

On remarque que c'est justement la solution particulière trouvée dans a). On aurait donc pu se passer ici de calculer la solution générale de l'équation différentielle homogène en remarquant que la solution particulière vérifiait la condition initiale.

Exercice 7

a) On cherche une solution particulière g de la forme $g(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$.
On a

$$2g'(t) + g(t) = -4a\sin(2t) + 4b\cos(2t) + a\cos(2t) + b\sin(2t) = (a + 4b)\cos(2t) + (b - 4a)\sin(2t),$$

donc $2g'(t) + g(t) = -15\sin(2t)$ si et seulement si $a + 4b = 0$ et $b - 4a = -15$. On en déduit que $a = -4b$ et $17b = -15$, d'où $b = -\frac{15}{17}$ et $a = \frac{60}{17}$. On a donc :

$$g(t) = \frac{60}{17}\cos(2t) - \frac{15}{17}\sin(2t).$$

b) La solution générale de l'équation différentielle homogène s'écrit :

$$y_h(t) = ke^{-\frac{t}{2}}.$$

Donc la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$y(t) = \frac{60}{17}\cos(2t) - \frac{15}{17}\sin(2t) + ke^{-\frac{t}{2}}.$$

Et si on impose $y(0) = 0$ on obtient :

$$y(0) = \frac{60}{17}\cos(0) - \frac{15}{17}\sin(0) + ke^{0} = 0.$$

d'où $k = -\frac{60}{17}$ et le solution s'écrit :

$$y(t) = \frac{60}{17}\cos(2t) - \frac{15}{17}\sin(2t) - \frac{60}{17}e^{-\frac{t}{2}}.$$

Exercice 8 L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une self d'inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la $f.é.m$ appliquée aux extrémités.

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$I(t) = I_p(t) + ke^{-\frac{R}{L}t},$$

oú I_p est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.
a) quand $E(t) = E_0$ constante la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre est $I_p(t) = \frac{E_0}{R}$ donc la solution de l'équation différentielle est :

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

b) quand $E(t) = E_0 \sin(wt)$ la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre est obtenue en écrivant que $I_p(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ vérifie l'équation, soit :

$$LI_p'(t)+RI_p(t) = -La\omega\sin(\omega t)+Lb\omega\cos(\omega t)+Ra\cos(\omega t)+Rb\sin(\omega t) = (Ra+Lb\omega)\cos(\omega t)+(Rb-La\omega)\sin(\omega t)$$

donc $LI_p'(t) + RI_p(t) = E_0\sin(\omega t)$ si et seulement si $Ra + Lb\omega = 0$ et $Rb - La\omega = E_0$.
On obtient donc : $a = \frac{-L\omega E_0}{R^2+(L\omega)^2}$ et $b = \frac{RE_0}{R^2+(L\omega)^2}$. Soit

$$I_p(t) = \frac{-L\omega E_0\cos(\omega t) + RE_0\sin(\omega t)}{R^2 + (L\omega)^2}.$$

Et la solution de l'équation différentielle est :

$$I(t) = \frac{-L\omega E_0\cos(\omega t) + RE_0\sin(\omega t)}{R^2 + (L\omega)^2} + ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Énoncés complémentaires.

Exercice 10 Les équations différentielles suivantes sont plus difficiles à résoudre que les précédentes. L'équation différentielle homogène associée est plus difficile à résoudre (primitives pas simples) et il faut trouver la forme de la solution particulière. Voici les solutions :

a) Pour $y'(t) + y(t)\tan(t) = \sin(2t)$ on a $y(t) = -2(\cos(t))^2 + k\cos(t)$.

b) Pour $2ty'(t) + y(t) = t^3$ on a $y(t) = \dfrac{t^3}{7} + k\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

c) Pour $(1+t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0$ on a $y(t) = 2 + k\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

d) Pour $t(t-1)y'(t) - (2t-1)y(t) + t^2 = 0$ on a $y(t) = t + kt(t-1)$.

Exercice 11 Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1-y(t))$.

a) En écrivant que $y(t) = C$ est solution de (E) on obient $C = 0$ ou bien $C = 1$.

b) On a $\dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y} = \dfrac{A+(B-A)y}{y(1-y)}$. Donc on aura $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$ si et seulement si $A = B = 1$.

c) On a donc $\dfrac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = \dfrac{y'(t)}{y(t)} + \dfrac{y'(t)}{1-y(t)}$ et une primitive, pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sera donnée par $ln(y(t)) - ln(1-y(t))$, qu'on peut écrire $ln(\dfrac{y(t)}{1-y(t)})$.

d) La solution de l'équation différentielle (E) sera donnée par $ln(\dfrac{y(t)}{1-y(t)}) = t + c$.

Soit encore $\dfrac{y(t)}{1-y(t)} = e^{(t+c)} = ke^t$, ce qui donne $y(t) = \dfrac{ke^t}{1+ke^t}$.

Exercice 12 Pour résoudre l'équation différentielle $ty'(t) = e^{-ty(t)} - y(t)$ on pose $u(t) = ty(t)$ et on obtient alors $u'(t) = y(t) + ty'(t)$. Donc l'équation différentielle $ty'(t) = e^{-ty(t)} - y(t)$ peut sécrire $u'(t) = e^{-u(t)}$ ou encore $u'(t).e^{u(t)} = 1$. On a donc $(e^{u(t)})' = (t)'$, d'où $e^{u(t)} = t + c$ et $u(t) = ln(t+c)$ donc $y(t) = \dfrac{ln(t+c)}{t}$.

Exercice 13 Cet exercice se résoud en utilisant la même technique que pour l'exercice 11. On obtient :

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}}\tanh(\sqrt{\frac{gb}{m}}(t+c)).$$

La vitesse tend donc vers une limite lorsque $t \to +\infty$, cette limite est égale à $\sqrt{\dfrac{mg}{b}}$.