

MATHEMATIQUES 01

Correction du second Partiel

EXERCICE 1

On considère x réel.

1. $\cos(2x) = \cos(3x + \pi)$ ssi $2x = 3x + \pi + 2k\pi$ ou $-2x = 3x + \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Cad, $x = (2k + 1)\pi$ ou $x = (2k + 1)\pi/5$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Donc, l'ensemble des solutions est $S = \{(2k + 1)\pi/5; k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Deux méthodes différentes.

Méthode 1.

$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$ ssi $\cos(x) = 1 - 2\cos^2(x)$ ssi $\cos(x) = -\cos(2x)$, car $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, $-\cos(x) = \cos(x + \pi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$ ssi $\cos(x + \pi) = \cos(2x)$.

On procède comme au (1.). On trouve $x + \pi = 2x + 2k\pi$ ou $x + \pi = -2x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est $S = \{(2k + 1)\pi/3; k \in \mathbb{Z}\}$.

Méthode 2.

On pose $X = \cos(x)$ et on résout l'équation $2X^2 + X - 1 = 0$; on trouve $X = -1$ ou $X = 1/2$. Ensuite, on résout $\cos(x) = -1$ et $\cos(x) = 1/2$. On trouve le même ensemble S .

3. $e^{\cos(2x)} = 1$ ssi $\cos(2x) = 0$ si et seulement si $2x = \pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est $S = \{(1 + 2k)\pi/4; k \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICE 2

1. Pour tout réel t , on a $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $t = \arcsin(x)$. On obtient : $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$.

Or, $\sin^2(\arcsin(x)) = x^2$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Donc, $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$.

Par conséquent : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) \in [-\pi/2; \pi/2]$, et $\cos(t) \geq 0$ si $t \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Donc, $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$, pour tout $x \in [-1, 1]$, et ainsi $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

2. On rappelle que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$, pour tout $x \in [-1, +1]$.

Soit $x \in [-1, +1]$ tel que $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\arcsin(x\sqrt{3}) = \arccos(x)$.

Donc $\cos(\arcsin(x\sqrt{3})) = \cos(\arccos(x))$.

Par (1.) on obtient : $\sqrt{1 - 3x^2} = x$.

On élève au carré, on a : $1 - 3x^2 = x^2$, cad $4x^2 = 1$. Donc, $x = -1/2$ ou $x = 1/2$.

On vérifie.

Si $x = 1/2$, $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(1/2) + \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2$.

Si $x = -1/2$, $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(-1/2) + \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/6 - \pi/3 = -\pi/2$; ne convient pas. Donc, il existe une unique solution $S = \{1/2\}$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 1}$.

1. La fonction est définie en x si $x^2 + 3x \geq 0$ et $x^2 - 1 \geq 0$.

Or $x^2 + 3x = x(x + 3) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty, -3] \cup \mathbb{R}^+$;

et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Donc, le domaine de définition de f est $D_f =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
 Par ailleurs, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.
 Mais $-\frac{1}{3} \notin D_f$ donc il n'existe pas de solutions à l'équation $f(x) = 0$.

2. On a $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 1}}$.

Donc $f(x) = \frac{x^2 + 3x - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 1}}$.

On met x en facteur. Comme $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$. On obtient :

$f(x) = \frac{x(3 + 1/x)}{x[\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 1/x^2}]} = \frac{3 + 1/x}{\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 1/x^2}}$

Quand x tend vers $+\infty$, $3 + 1/x$ tend vers 3, et $\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 1/x^2}$ tend vers $1 + 1 = 2$.

Donc, la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est $3/2$.

3. La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$; par conséquent $f(x)$ est dérivable sur $] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

La dérivée de $\sqrt{u(x)}$ est $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Donc, $f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

EXERCICE 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; \pi[$, définie par $f(x) = 2 \arctan(e^x)$.

1. $\exp$ et $\arctan$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R} : D_f = \mathbb{R}$.
2. $e(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ et $\arctan(]0, +\infty[) =]0, \pi/2[$. Donc l'ensemble image de f , noté $Im(f) =]0, \pi[$.
3. $\exp$ et $\arctan$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de telles fonctions).

On rappelle que la dérivée de $\arctan(u(x)) = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$, et celle de e^x est e^x .

Donc, $f'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$. On note que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 et comme $\arctan(0) = 0$ et $\arctan$ est une fonction continue, $f(x)$ tend vers 0.

Quand x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et comme $\arctan(X)$ tend vers $\pi/2$ quand X tend vers $+\infty$; donc $f(x)$ tend vers π .

Tableau de variation.		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ π

4. La fonction f est composée de fonctions bijectives $x \mapsto 2x$, $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto e^x$; donc f est bijective. Sa fonction réciproque f^{-1} est donnée par $f^{-1}(x) = \ln(\tan(x/2))$.

5. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable partout sur son domaine de définition, cad $]0, \pi[$, car $\tan$ est dérivable sur ce domaine et $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On rappelle que la dérivée de $\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et celle de $\tan(v(x)) = \frac{v'(x)}{\cos^2(v(x))} = v'(x)(1 + \tan^2(v(x)))$.

Ici $v(x) = x/2$, et $u(x) = \tan(v(x))$ donc $u'(x) = \frac{1}{2 \cos^2(x/2)} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x/2))$.

Donc, $f^{-1'}(x) = \frac{1}{2 \cos^2(x/2) \tan(x/2)} = \frac{1}{2 \tan(x/2)}(1 + \tan^2(x/2))$.

6. $f(x) = \pi/2$ ssi $x = f^{-1}(\pi/2) = \ln(\tan(\pi/4)) = \ln(1) = 0$.

Et $f^{-1}(y) = \ln(\sqrt{3})$ ssi $y = f(\ln(\sqrt{3})) = 2 \arctan(e^{\ln(\sqrt{3})}) = 2 \arctan(\sqrt{3}) = 2\pi/3$.

EXERCICE 5

F_1 est définie sur $] - \frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ car la fonction tangente est continue sur tout intervalle $] - \frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[+ k\pi$ mais comme 0 doit appartenir au domaine de définition on doit prendre $k = 0$ et :

$F_1(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \left[-\ln(|\cos(t)|) \right]_0^x = -\ln(|\cos(x)|)$, car $\cos(0) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

F_2 est définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et

$$F_2(x) = \int_{\pi}^x \sin^3(t) \cos(t) dt = \left[\sin^4(t)/4 \right]_{\pi}^x = \sin^4(x)/4, \text{ car } \sin(\pi) = 0.$$

F_3 est définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2+2x+2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2x+2 > 1$ et :

$$F_3(x) = \int_{-1}^x \frac{t+1}{t^2+2t+2} dt = \left[\ln(t^2+2t+2)/2 \right]_{-1}^x = \ln(x^2+2x+2)/2 - \ln(1-2+2)/2 = \ln(x^2+2x+2)/2.$$

F_4 est définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = x^2+2x+2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2x+2 > 1$ et

$$F_4(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{t^2+2t+2} dt = \int_{-1}^x \frac{1}{1+(t+1)^2} dt.$$

$$\text{donc } F_4(x) = \left[\arctan(1+t) \right]_{-1}^x = \arctan(1+x) - \arctan(0) = \arctan(1+x).$$

EXERCICE 6

$9-4x^2 > 0$ ssi $9 > 4x^2$ ssi $9/4 > x^2$ ssi $x \in]-3/2; 3/2[$. Comme $[-3/4; 3/4] \subset]-3/2; 3/2[$ et que $1/\sqrt{9-4x^2}$ est continue sur cet intervalle, $I = \int_{-3/4}^{3/4} \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ est bien définie.

Posons $x = 3t/2$.

Alors $t = 2x/3$, donc quand x va de $-3/4$ à $3/4$, t va de $-1/2$ à $1/2$.

De plus, $dx = 3/2 dt$.

$$I = \int_{-3/4}^{3/4} \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{\sqrt{9-9t^2}} (3/2) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{9-9t^2}} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{3}{3\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

$$\text{donc, } I = \left[\arcsin(t) \right]_{-1/2}^{1/2} = \arcsin(1/2) - \arcsin(-1/2) = \pi/6 - (-\pi/6) = \pi/3.$$

EXERCICE 7

La fonction $f(x) = \sin(x) \cos(x) e^{\sin(x)}$ est continue partout sur $\mathbb{R}$, elle est donc intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

$$\text{Posons } I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) e^{\sin(x)} dx$$

Calculons I par une intégration par parties.

On pose $u(x) = \sin(x)$ alors $u'(x) = \cos(x)$;

et

$$v'(x) = \cos(x) e^{\sin(x)} \text{ avec } v(x) = e^{\sin(x)}.$$

$$\text{On a donc } I = \int_0^{\pi/2} u(v)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x) dx.$$

$$\text{Cad } I = \left[\sin(x) e^{\sin(x)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x) e^{\sin(x)} dx = \left[\sin(x) e^{\sin(x)} \right]_0^{\pi/2} - \left[e^{\sin(x)} \right]_0^{\pi/2}.$$

$$\text{Donc, } I = \left[(\sin(x) - 1) e^{\sin(x)} \right]_0^{\pi/2} = (\sin(\pi/2) - 1) e^{\sin(\pi/2)} - (\sin(0) - 1) e^{\sin(0)} = 1.$$