Université de Provence	2009–2010

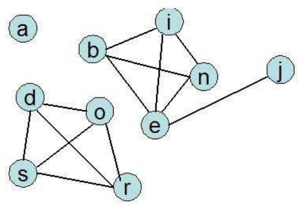
Mathématiques Générales I

Correction du partiel du 9 octobre 2009

Exercice 1.
Voici les bons symboles insérés dans le texte :

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ majorée} & \Leftarrow & f \text{ bornée} \\[2em]
\{1,2\} & \subset & \{1{,}2{,}3\} \\[2em]
\text{A} & \in & \mathbb{P}(A) \\[2em]
\{1\} & \in & \big\{\{1\},\{1{,}2\}\big\} \\[2em]
f(2) \neq f(3) & \Leftarrow & f \text{ injective} \\[2em]
A & \subset & A \cup B \\[2em]
\emptyset & \in & \mathbb{P}(A) \\[2em]
f \text{ surjective} & \Leftrightarrow & F \subset f(E). \\[2em]
1 & \notin & \big\{\{1\},\{1{,}2\}\big\}
\end{array}
$$

Exercice 2.
Voici le graphe représentant les lettres de l'alphabet : $a, b, d, e, i, j, n, o, r, s$ où deux sommets sont reliés s'ils appartiennent à un même mot dans la phrase "je dors bien".



Ce graphe n'est pas connexe. La lettre a n'est reliée à aucun sommet. Il y a trois composantes connexes, à savoir : {a}, {d,o,r,s} et {b,e,i,j,n}.

Exercice 3.

Soit G un graphe à 5 sommets dont tous les sommets sont de même degré d.

1. Montrons que d est pair. Raisonnons par l'absurde. Supposons que d est impair alors on aura 5 sommets de degré impair, soit un nombre impair de sommets de degré impair, ce qui contredit le théorème 1. Par conséquent d est pair.
2. Le graphe G est simple, il a 5 sommets donc d est au plus égal à 4. Par ailleurs puisque d est pair, d ne peut prendre que les valeurs 0, 2 et 4. Si le graphe G est connexe le degré des sommets ne peut être égal à 0 puisqu'alors aucun des sommets ne serait relié à un autre et on aurait 5 composantes connexes. Le graphe G n'est pas complet donc d est forcément strictement inférieur à 4, puisque chaque sommet d'un graphe complet à n sommets est de degré $n-1$. Le degré d est donc égal à 2. Tous les sommets d'un cycle sont de degré 2. Par conséquent G est un cycle.

Exercice 4.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$.

1. f n'est pas injective. En effet :
$$\exists x = 1, \ \ \exists x' = -1 \neq x \ \text{ tels que } \ f(x) = f(x') = 0.$$
2. f n'est pas surjective. En effet, on peut dire que $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \neq \mathbb{R}$, ou bien que $\exists y = 2 \in \mathbb{R}$ tel que $\nexists x \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = 2$.
C'est à dire $y = 2$ ne possède pas d'antécédent par f.
3. On a $f^{-1}([0,2]) = [-1,1]$ et donc
$$f\big(f^{-1}([0,2])\big) = [0,1].$$
4. On a $f([0,2]) = [-3,1]$ et donc
$$f^{-1}\big(f([0,2])\big) = [-2,2].$$

Remarque I *Ces images et images réciproque sont obtenues soit en dressant un tableau de variations soit en observant le graphe de f (après avoir éventuellement dressé un tableau de variations)*

Remarque II *Attention l'image des bornes des intervalles n'est pas égal aux bornes des images !....*

Exercice 5.

1. Pour montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$, on va montrer que tout élément de $f(A)$ appartient à $f(B)$.
   Soit $y \in f(A)$, alors par définition de $f(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais comme par hypothèse $A \subset B$, cet élément $x \in B$, par conséquent $\exists x \in B$ tel que $y = f(x)$. Ce qui implique que $y \in f(B)$.
2. De la même manière pour montrer que si $A' \subset B'$ alors $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$, on va montrer que tout élément de $f^{-1}(A')$ appartient à $f^{-1}(B')$.
   Soit $x \in f^{-1}(A')$, alors par définition de $f^{-1}(A')$, $f(x) \in A'$. Mais comme par hypothèse $A' \subset B'$, cet élément $f(x) \in B'$, par conséquent $x \in f^{-1}(B')$.

Exercice 6.

Soit f une application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Pour montrer que f est bijective, nous allons montrer qu'elle est injective et surjective.

- Injectivité :
  Soient x et x' dans $[1, +\infty[$ tels que $f(x) = f(x')$.
  Alors $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x'^2 - 1}$, donc $x^2 - 1 = x'^2 - 1$ et par conséquent $x = x'$ puisque x et x' appartiennent à $[1, +\infty[$ et donc ne peuvent pas être de signe contraire.
- Surjectivité :
  $$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad \exists x = \sqrt{y^2 + 1} \in [1, +\infty[\ \text{ tel que } \ y = \sqrt{x^2 - 1} = f(x).$$
- On remarque que la fonction réciproque apparait lorsque l'on montre la surjectivité. On a :
  $$f^{-1} : y \in \mathbb{R} \longrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y^2 + 1} \in [1, +\infty[.$$

Exercice 7.

1. Grâce aux formules d'Euler on sait que $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Donc
   $$\cos^3(x) = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$$
   $$\cos^3(x) = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}.$$
   On en déduit que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
2. D'après la question précédente on a $4\cos^3(x) = \cos(3x) + 3\cos(x)$.
   Donc l'équation $4\cos^3(x) = 3\cos(x) + 1$ s'écrit $\cos(3x) + 3\cos(x) = 3\cos(x) + 1$. Soit encore $\cos(3x) = 1$. Ce qui implique que $3x = 0 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit $x = \dfrac{2k\pi}{3}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.

1. Le nombre $z = 4 - 3i$ n'est pas racine de l'unité car son module est égal à 5.
2. Le nombre i n'est pas racine cubique de l'unité car $i^3 = -i \neq 1$.

Exercice 9.

Le module de $2i - 2$ est égal à $2\sqrt{2}$, on en déduit que son argument est égal à $\frac{3\pi}{4}$. On a donc $2i - 2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Cherchons le nombre complexe z tel $z^3 = 2i - 2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Si on pose $z = \rho e^{i\theta}$, on aura $\rho^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ si et seulement si on a : $\rho = \sqrt{2}$ et $3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. C'est à dire $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$. Ce qui donne les trois racines suivantes :

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}},$$
$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$