Université de Provence | Licence Mathématiques et Informatique
Semestre 1 | Planche 11

MATHEMATIQUES GENERALES 1
Équa diff du 1er ordre _ autres exercices

CORRECTION

Exercice 1. Il s'agit d'une équation différentielle séparable que l'on peut écrire sous la forme : $y^3(t)y'(t) = t$, soit encore $(\frac{y^4(t)}{4})' = (\frac{t^2}{2})'$.
Par conséquent on obtient $\frac{y^4(t)}{4} = \frac{t^2}{2} + c$, où c est la constante d'intégration. On voit donc que la solution n'est pas forcément définie pour toute condition initiale (donc pour toute valeur de c) mais si $c \geq 0$ alors on a :
$y(t) = (2t^2 + c)^{1/4}$ ou bien $y(t) = -(2t^2 + c)^{1/4}$.

Exercice 2. Il s'agit d'une équation différentielle séparable que l'on peut écrire sous la forme : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -2t$, soit encore $(-\frac{1}{y(t)})' = (-t^2)'$.
Par conséquent on obtient $\frac{1}{y(t)} = t^2 + c$, où c est la constante d'intégration. Et finalement $y(t) = \frac{1}{t^2 + c}$.

- Si $y(0) = 1$, alors la solution s'écrit $y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$. Cette solution est définie pour tout temps.
- Si $y(0) = -1$, alors la solution s'écrit $y(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$. Cette solution n'est définie que sur $]-1, +1[$.
- Si $y(0) = 0$, alors la solution ne peut pas être obtenue par l'expression ci-dessus (car on a supposé que la solution y ne s'annulait pas). On remarque que la fonction $y \equiv 0$ est une solution de l'équation et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 3. Il s'agit d'une équation différentielle séparable que l'on peut écrire sous la forme : $\cos(y(t))y'(t) = -sin(t)$, soit encore $(\sin(y(t)))' = (\cos(t))'$.
Par conséquent on obtient $\sin(y(t)) = \cos(t) + c$, où c est la constante d'intégration. Si $y(0) = \frac{\pi}{2}$ alors $c = 0$. On a donc $\sin(y(t)) = \cos(t)$, soit encore $\sin(y(t)) = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$. On en déduit que $y(t) = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi$ ou bien $y(t) = \pi - (\frac{\pi}{2} - t) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + t + 2k\pi$.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle :

$$ty'(t) + (t-1)y(t) = e^{-t}$$

1. On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(t) = ae^{-t}$. On a alors :

$$ty_p'(t) + (t-1)y_p(t) = -ae^{-t} + (t-1)ae^{-t} = -ae^{-t}.$$

   Par conséquent y_p sera une solution particulière si $a = -1$. Ce qui donne $y_p(t) = -e^{-t}$.

2. On cherche d'abord l'expression de la solution générale de l'équation homogène associée. On a donc

$$y_h(t) = ke^{\int -\frac{t-1}{t}dt} = ke^{\int (\frac{1}{t}-1)dt} = ke^{ln(t)-t} = kte^{-t}$$

   La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (kt-1)e^{-t}.$$

3. (a) Les solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = -1$ sont données par : $y(t) = (kt-1)e^{-t}$ pour toutes valeurs de k réel. Il y a donc une infinité de solutions dans ce cas.

   (b) Les solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(1) = 0$ sont données par : $y(t) = (t-1)e^{-t}$. Il y a donc ici une solution unique.

   (c) Il n'y a pas de solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$. En effet $y(0)$ est toujors égal à -1.

   Ceci montre qu'une même équation différentielle peut avoir une infinité de solutions, une solution unique ou bien aucune solution selon la condition initiale. Si on observe l'équation on voit que pour $t = 0$ le terme en y' n'existe plus (on a d'ailleurs divisé par t pour trouver la solution générale et ceci n'est justifié que si $t \neq 0$). L'équation n'est pas définie pour tout t. L'étude mathématique des équations différentielles (existence et unicité de solutions) n'est pas simple et vous sera présenté dans les années à venir.