# 1 Solutions exercices Courbes planes

## 1.1 courbes paramétrées

**Exercice 1** *Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o,* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *), soit C la courbe définie sur* $[0;2\pi]$

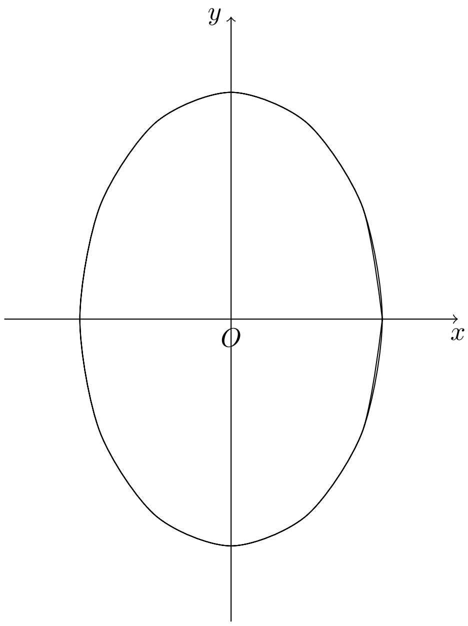
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

a) Reconnaître et représenter rapidement C
b) Déterminer une représentation cartésienne de C

**Solution 1** *La courbe définie sur* $[0;2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

est une ellipse ; l'étude est facile.
La courbe :




Une représentation cartésienne de C est $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

**Exercice 2** *Etudier la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Plus précisement :
1) Définir un intervalle d'étude en précisant les symétries associées.
2) Donner le tableau de variations
3) Etudier les points particuliers et leur tangente.
4) Tracer la courbe

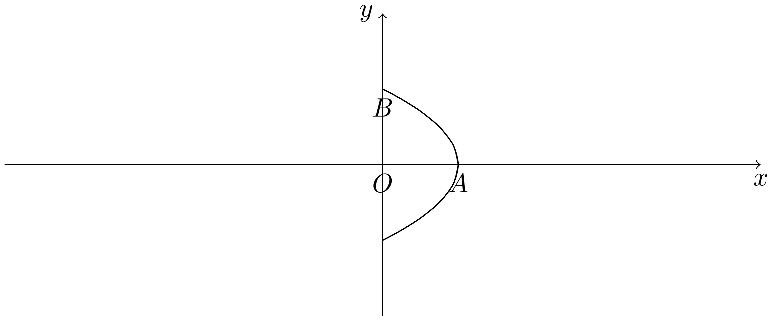
**Solution 2** *La courbe définie sur* $[0;2\pi]$

Les fonctions x et y sont $2\pi$ périodiques ;
$x$ est paire, y est impaire :
On peut faire l'étude sur $[0,\pi]$ et faire ensuite une symétrie par rapport à (Ox)
Les dérivées :
$x'(t) = -2\cos t \sin t$
$y'(t) = \cos t$
Le tableau de varaitions :

| t | 0 $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| x' | - | + |
| x | ↘ | ↗ |
| y' | + | - |
| y | ↗ | ↘ |

Points particuliers :
En $t = 0$ :
Le point est en A(1,0)
La tangente est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}(0, 1)$ :
Elle est verticale ;
En $t = \frac{\pi}{2}$ :
Le point est en B(0,1)
C'est un point stationnaire :
Comme $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{y'(t)}{x'(t)}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{-1}{2\sin t}) = \frac{-1}{2}$, la pente de la tangente est $\frac{-1}{2}$
En $t = \pi$ :
Le point est en A(1,0)
La tangente est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}(0, -1)$ : elle est verticale ;

La courbe est une parabole :




Le point décrit la portion ABA, puis AB'A, où B' est le symétrique de B par rapport à (Ox)

**Exercice 3** *Etudier la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = 3(t - sint) \\ y(t) = 3(1\text{- cos t}) \end{cases} \text{(cycloïde)}$$

Interprétation mécanique : roulement sans glissement d'une circonférence sur un axe : une roue C de centre A et de rayon 3 unités roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l'aide d'un repère adapté, montrer que l'équation de la courbe précédente est l'équation de la trajectoire d'un point fixe sur la roue :

Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d'un point M de C, noter I le point de contact et t l'angle $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JI})$, où A(1 ;0) et J le centre du cercle : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM.

**Solution 3** *Cycloïde*

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1\text{- } \cos t \end{cases}$$

On a facilement la période de y : $2\pi$
x n'est pas périodique mais $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$
Ainsi, on peut étudier la courbe sur $[0, 2\pi]$ et faire des translations de vecteurs $2\pi k\overrightarrow{i}$

Les dérivées :

$$x'(t) = 1 - \cos t$$
$$y'(t) = \sin t$$

sur $[0,\pi]$ , $y(t)$ est croissante ; x(t) est croissante
La courbe :

Interprétation mécanique : Considérons une circonférence qui roule sans glissement sur un axe : prenons par exemple une roue de centre I et de rayon 1 roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l'instant 0, la roue a pour point de contact un point O, origine du repère :

A l'instant t, le point de contact est le point I ; le centre de la circonférence est J
Ecrivons la condition de roulement sans glissement :
Il faut que $OI = ArcIM$ :
Cherchons alors les coordonnées de M :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JM}$
Notons t l'angle : $(\widehat{\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JI}})$ :
Alors $(\widehat{i, \overrightarrow{JM}}) = -t - \dfrac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{OA}(a;0), \overrightarrow{AJ}(0;1), \overrightarrow{JM}(\cos(-t-\dfrac{\pi}{2}); \sin(-t-\dfrac{\pi}{2}))$
$OI = ArcIM$ : donc
$a = t$ :

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j}$$

Donc le point M décrit la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t - sint \\ y(t) = 1\text{-}\cos t \end{cases}$$

Courbe

**Exercice 4** *Etudier et construire la courbe paramétrée :*

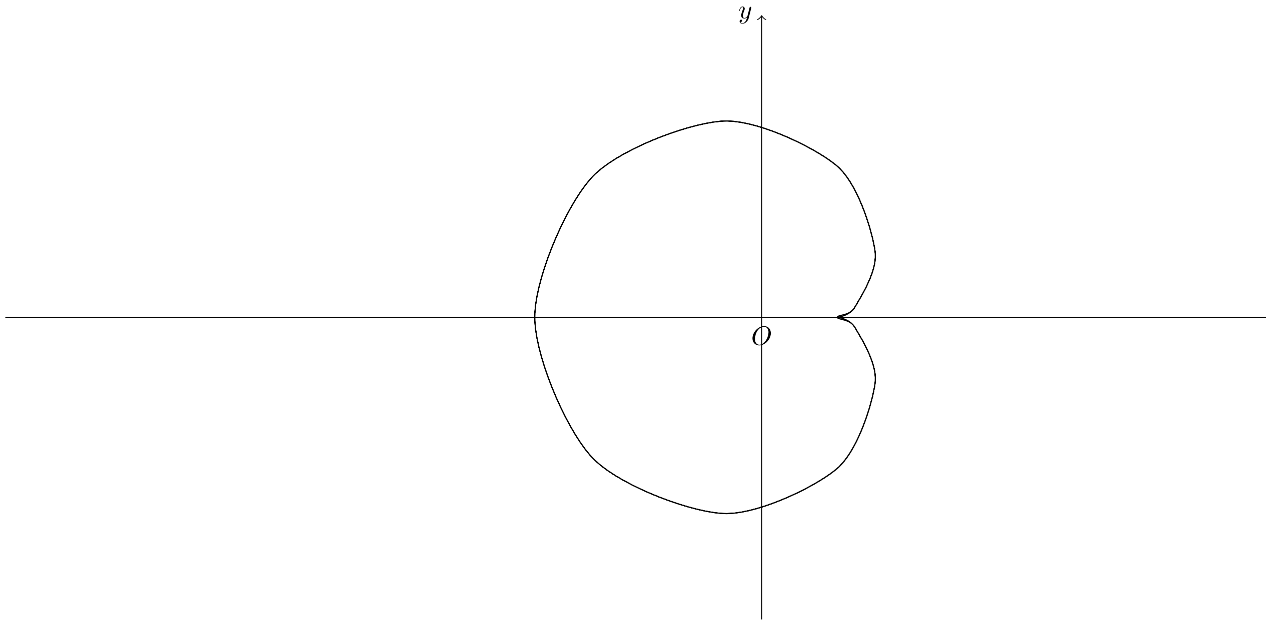
$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin \mathrm{t} \text{ - } \sin 2\mathrm{t} \end{cases}$ c'est une épicycloïde : interprétation mécanique :

Soit cercle $C_1$de centre C, de rayon 1, roulant sans glisser sur un cercle fixe $C_2$ de centre 0, de rayon 1 : Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d'un point M de $C_1$, noter I le point de contact des deux cercles : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM, où A(1 ;0).

**Solution 4** *La courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t\text{-}\sin 2t \end{cases}$$

Etude :
$x\prime(t) = 2sint(2cost - 1)$ ; $y\prime(t) = 4(1 - cost)(cost + \frac{1}{2})$
On obtient comme points remarquables :
-En $t = 0$ : A(1 ;0), $\overrightarrow{V_1}(0;0)$ point stationnaire, $\overrightarrow{V_2}(2;0)$ tangente horizontale.
-En $t = \frac{\pi}{3}$ : B$(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; $\overrightarrow{V_1}(0;2)$ tangente verticale ;
-En $t = \frac{2\pi}{3}$ : C$(\frac{-1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2})$,tangente horizontale.
-En $t = \pi$ : D$(-3;0)$,tangente verticale.




La courbe :

**Exercice 5** *La courbe paramétrée :*
$x(t) = \cos 2t; \;\; y(t) = \cos t - \sin t$ :

**Solution 5** *Pente de la tangente en A de paramètre $t = 0$, à la courbe paramétrée :* $x(t) = \cos 2t; \;\; y(t) = \cos t - \sin t$ :

Comme $x'(t) = -2\sin 2t, \; y'(t) = -\cos t - \sin t$
En A : la pente de la tangente est infinie
x et y sont $2\pi$ périodiques ; y n'est ni paire ni impaire :
Un intervalle d'étude pour cette courbe est donc $[0, 2\pi]$
Y-a-t'il des points stationnaires ?
$x'(t) = 0$ pour $t = \dfrac{k\pi}{2}$
Or pour $t = \dfrac{k\pi}{2}, y'(t) = -\cos t - \sin t \neq 0$
Il n'y a pas de point stationnaire

**Exercice 6** *Soit la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Etudier précisément les points particuliers et leur tangente
Etudier les branches infinies

**Solution 6** *Soit la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

On fait l'étude sur $\mathbb{R}^*$

$x\prime(t) = \dfrac{t^3-1}{t^3}$ : $x'$ a le signe de $t(t-1)$ : $x$' est négatif entre les racines, donc sur $]0;1]$

$y'(t) = \dfrac{-1+t^3}{t^2}$ : $y'$ positif pour $t \geq 1$

Les points particuliers et leur tangente sont :

$t = 1$ :Le point est en A$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

C'est un point stationnaire

La pente de la tangente est $\lim_{t\to 1}(\dfrac{y'}{x'}) = 1$

Type de rebroussement :

On peut voir que $\overrightarrow{V_2(0)}$ est non nul : on a un point de rebroussement de première espèce.

Les branches infinies :

Quand t tend vers 0 :

$$x(t) = t + \frac{1}{2t^2} = \frac{2t^3+1}{2t^2}$$
$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} = \frac{t^3+2}{2t}$$

Ainsi : x et y tendent vers $+\infty$,on a :

x$\sim \dfrac{1}{2t^2}$;y$\sim \dfrac{1}{t}$ : donc il y a une branche parabolique (Ox) puisque $\dfrac{y}{x}$ tend vers 0

Quand t tend vers $+\infty$ :

x$\sim$ $t$;y$\sim \dfrac{t^2}{2}$ :

donc il y a une branche parabolique (Oy) puisque $\dfrac{y}{x}$ tend vers $+\infty$

De même t tend vers -$\infty$

$(t + \dfrac{1}{2t^2}, \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t})$

**Exercice 7** *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

on mettra en évidence les points remarquables.

**Solution 7** *La courbe paramétrée*

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

x est paire, y est impaire : étude sur $[0\,;+\infty[$et symétrie (Ox)

$x\prime(t) = [2t - t(t^2+1)]\exp(-\frac{t^2}{2}) = t(-t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2})$

$y\prime(t) = (-t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2})$

Tableau de variations :

| t | 0 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| x'(t) | 0 +0 | - |
| x | 1$\nearrow x_0$ | $\searrow 0$ |
| y'(t) | 1+0 | - |
| y | 0$\nearrow y_0$ | $\searrow 0$ |

Points particuliers : $t = 0$ : en A(1 ;0), tangente dirigée par $\overrightarrow{V_1}(0;1)$

Point stationnaire : en $t = 1$ :en calculant x" et y", on obtient : $x"(1) = -2e^{\frac{-1}{2}} = y"(1)$ : la tangente en $B(x_0, y_0)$ est de pente 1 ; $x_0 \simeq 1.2$, $y_0 \simeq 0.6$

Quand t tend vers $+\infty$, il y a un point asymptote : le point 0. La tangente est de pente $\lim_{t\to+\infty}(\dfrac{y'}{x'}) = 0$.

**Exercice 8** *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante :*
$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

**Solution 8** *La courbe paramétrée suivante : (strophoïde)*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Etude sur [0 ;+$\infty$[et symétrie (Ox)
$x\prime(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$
$y\prime(t) = \dfrac{1-t^4-4t^2}{1+t^2}$ : on pose $t^2 = T$ pour étudier le signe de y' :
$y\prime(t)$>0
pour t compris entre 0 et $t_0$=$\sqrt{\sqrt{5}-2}$

Tableau de variations :

| t | 0 $t_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| x'(t) | 0 - | - |
| x | 1$\searrow x_0$ | 0$\searrow -1$ |
| y'(t) | 1+ | - |
| y | 0$\nearrow y_0$ | $\searrow -\infty$ |

Points particuliers :
$t = 0$ : en A(1 ;0), tangente dirigée par $\overrightarrow{V_1}(0;1)$ : verticale.
en $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ : la tangente en $B(x_0, y_0)$est horizontale.
$x_0 \simeq 0.6$, $y_0 \simeq 0.3$
Quand t tend vers $+\infty$, il y a une asymptote "x=-1" :

## 1.2 courbes polaires

**Exercice 9** *Reconnaître et étudier les courbes polaires : (a et $\theta_0$ sont réels donnés)*

$$r = a; r = \theta_0; r = \frac{5}{\cos\theta}; r = -\frac{1}{\sin(\theta-\theta_0)}; r\cos(\theta-\theta_0) = a; r = a\cos(\theta-\theta_0)$$

**Solution 9** *Les courbes polaires :*

r=a : Cercle de centre O et de rayon valeur absolue de a
r=$\theta_0$ :
Erreur d' énoncé, c'est en fait :
$\theta = \theta_0$ :
C'est la droite d'angle $\theta_0 avec(Ox)$
r= $\dfrac{5}{\cos\theta}$;
C'est aussi
rcos $\theta = 5$ :
Soit la droite d'équation x=5
r=- $\dfrac{1}{\sin(\theta-\theta_0)}$ :
C'est aussi
rsin$(\theta-\theta_0) = -1$ :
Soit la droite d'équation Y=-1 dans le repère (OX,OY) d'angle $\theta_0$

rcos$(\theta - \theta_0) = a$ :
C'est la droite d'équation X=a dans le repère (OX,OY) d'angle $\theta_0$
r=acos$(\theta - \theta_0)$
C'est un cercle, tout comme l'ensemble des points :
r=acos $(\theta)$ :
est un cercle de diamètre valeur absolue de a ;

**Exercice 10** *Etudier et construire la courbe polaire :*
$r = 3\cos 2\theta$,*a étant un réel positif.*

**Solution 10** *La courbe polaire :*

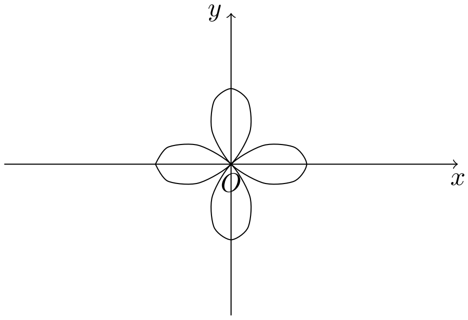
$r = a\cos 2\theta$, a étant un réel positif.
Comme $r(\theta+\pi) = r(\theta)$,il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur $\pi$ et de faire une symétrie O.
Comme r$(\theta)$ est paire, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$;
On fera une symétrie (Ox)
Alors : $r\prime = -2a\sin 2\theta$

On a le tableau :

| $\theta$ | $0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| signe r | $+$ 0 - |
| r' | - |
| tanv | -∞ -∞ |

Points particuliers :
En $\theta = 0$ : $r = a$; $v = \frac{\pi}{2}$ : la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur (Ox) ;
En $\theta = \frac{\pi}{4}$ : r=0
Le point est au pôle
$\frac{r}{r'} = 0$
Donc $\tan v = 0$ : la tangente est confondue avec le rayon vecteur : angle $\frac{\pi}{4}$
La tangente est confondue avec la bissectrice du repère.
En $\theta = \frac{\pi}{2}, r = -a$
$v = \frac{\pi}{2}$ :la tangente est confondue au rayon vecteur horizontale

Courbe :
On la trace pour a=1 par exemple :




Un magnifique trèfle à 4 feuilles, une fois les symétries faites !

**Exercice 11** *Etudier et construire la courbe polaire (spirale logarithmique)*

$$r = e^{\theta}$$

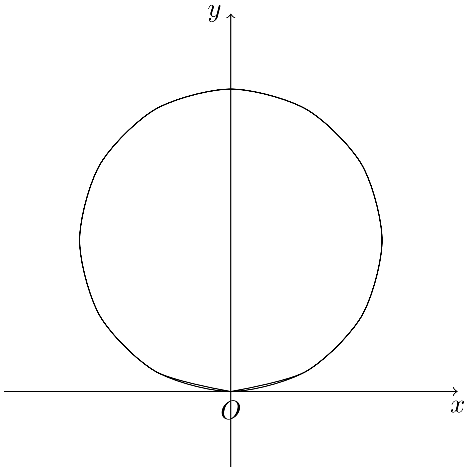
**Solution 11**

**Exercice 12** *Etudier la courbe polaire :* $r = 4\sin\theta$; *tracer la courbe en précisant :*

- Un intervalle d'étude et les symétries associées ;
- Les tangentes aux points remarquables.

**Solution 12** $r = 4\sin\theta$;

Comme $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$,il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur $2\pi$
Comme r($\theta$) est impaire, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$;
On fera une symétrie (O)
Alors : $r\prime = 4\cos\theta$
$\frac{r}{r'}$ =tanv=tan$\theta$
Donc
$v = \theta$
Points particuliers :
En $\theta = 0$ : $r = 0$; $v = 0$ la tangente est portée par (Ox) ;
Le point est au pôle
En $\theta = \frac{\pi}{2}$ : r=4 la tangente est horizontale car $v = \theta$
En $\theta = \pi$ : r=0
la tangente est portée par (Ox)
Courbe :




Remarque :
Cette courbe est un cercle :
L'étude précédente est inutile...

**Exercice 13** *Calculer la longueur de la courbe* $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [-a, a]$, *a réel positif donné.*

**Solution 13** *Longueur de la portion de chainette :*

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

$L$=$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + ch^2(x)}dx$
$L$=$\int_{-a}^{a} sh(x)dx = 2cha$

**Exercice 14** *Le sillon d'un disque peut être modélisé par une spirale d'Archimède d'équation polaire :* $r = a\frac{\theta}{2\pi}$

a représente la largeur du sillon ; (en effet, quand $\theta$ augmente de $2\pi$, l'épaisseur de la "bobine" augmente de $a\frac{\theta+2\pi}{2\pi} - a\frac{\theta}{2\pi} = a$)

Le disque est gravé entre les distances au centre R et R' : calculer la longueur de sillon gravé.

Application numérique : $R = 2$cm, $R\prime = 5$cm, $a = 0,001$cm

**Solution 14** *La longueur est donée par la formule du cours ;*
*Il faut alors calculer une intégrale du type :*
$L=\int_a^b \sqrt{1+x^2}dx$
*Pour cela on fait le changement de variable :*
$x = sh(t)$ *car :*
$1 + sh^2(t) = ch^2(t)$
*On obtient alors un sillon de longueur environ 16 km !*

**Exercice 15** *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par une cardioïde* $r = 1 + cos\theta$*, courbe que l'on étudiera d'abord.*

**Solution 15** *Aire :*

Aire de la surface int érieure de la cardioïde $r = 1 + cos\theta$ :

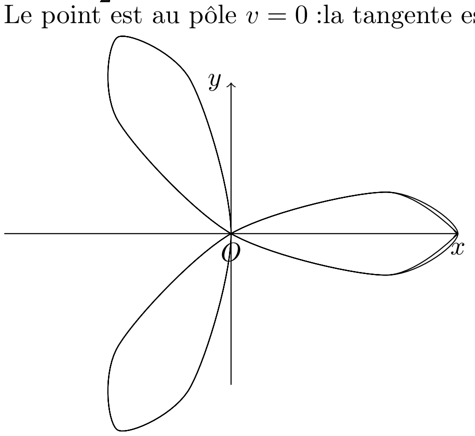
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + cos\theta)^2)d\theta$$

On obtient après un calcul facile :
$A = 3\pi$

**Exercice 16** *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par le trèfle à trois pétales :* $r = 3cos3\theta$*,courbe que l'on étudiera d'abord.*

**Solution 16** *le trèfle à trois pétales*

Comme $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$,il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur $2\pi$
Comme r($\theta$) est paire, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$;
On fera une symétrie (Ox)
Alors : $r\prime = -9\sin 3\theta$
r change de signe en :
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$
Points particuliers :
En $\theta = 0 : r = 3; v = \frac{\pi}{2}$ : la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur (Ox) ;
En $\theta = \frac{\pi}{6}$ : r=0
Le point est au pôle
$\frac{r}{r'} = 0$
Donc $\tan v = 0$ : la tangente est confondue avec le rayon vecteur : angle $\frac{\pi}{6}$
En $\theta = \frac{\pi}{3}$ : r=-3
$v = \frac{\pi}{2}$ : la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur ;
En $\theta = \frac{\pi}{2}, r = 0$
Le point est au pôle $v = 0$ :la tangente est confondue au rayon vecteur



Aire de la surface int érieure $r = 3cos3\theta$ :
Pour un pétale :

$$a = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3cos3\theta)^2 d\theta$$

a= $\dfrac{3\pi}{4}$
Et :

$$A = \frac{9\pi}{4}$$