Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2013-2014

Mathematiques 02

Corrigé du partiel 1 – 11 Octobre 2013

Calculette et documents non autorisés | Durée : 2 heures

On note $A(x, y, z)$ le point A de coordonnées (x, y, z). O est l'origine de l'espace ou du plan.

Exercice 1

Donner la définition d'un plan et d'une droite dans $\mathbb{R}^3$.

Réponse : Un plan passant par un point A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à un vecteur fixé $\vec{n}$.

Une droite passant par un point A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à un vecteur fixé $\vec{u}$.

Exercice 2

On se place dans le plan euclidien. Soit (D_1) la droite définie par l'équation cartésienne suivante : $x - 4 = 0$. Soit (D_2) la droite définie par l'équation paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & 1 + 2t \\ y(t) = & -1 + t \end{cases}$$

1. Donner une équation paramétrée de (D_1).

Réponse :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases}$$

2. Donner une équation cartésienne de (D_2).

Réponse : $x - 2y - 3 = 0$.

3. Donner les coordonnés du point d'intersection des deux droites.

Réponse : $x = 4$ et $y = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

On considère les trois points de l'espace suivants $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(-1, 1, 1)$.

1. Vérifier qu'ils ne sont pas alignés.

Réponse : $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 0)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.

2. Donner l'angle aigü et non-orienté entre les droites (AB) et (AC).

Réponse : $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \ \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc l'angle aigü et non-orienté entre les droites (AB) et (AC) est $\dfrac{\pi}{4}$.

3. Donner une équation paramétrée du plan $\mathcal{P}$ passant par ces trois points.

Réponse : Il faut ajouter $s\ \overrightarrow{AB} + t\ \overrightarrow{AC}$ aux coordonnées de A, on a donc

$$\begin{cases} x = -s - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

4. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
Réponse : Les points du plan $\mathcal{P}$ vérifient $y = 1$. Comme l'ensemble des points de l'espace qui vérifient $y = 1$, est lui-même un plan, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $y = 1$.

5. Donner la distance $d(D, \mathcal{P})$ où $D(1, 0, 1)$.
Réponse : Rappelons la formule $d(A, P) = \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. La distance de D à $\mathcal{P}$ est donc 1.

6. Donner une équation paramétrée de la droite (Δ) perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point D.
Réponse :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

7. Donner l'aire du triangle ABC.
Réponse : $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{BC} = (0, 0, 1)$ sont de norme 1 et orthogonaux, l'aire du triangle ABC est donc $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

Soit $\overrightarrow{u}(1, 0, 1)$ un vecteur de l'espace.
1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. En donner une équation paramétrée.

Réponse : C'est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, son équation paramétrée est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u} = 0$. En donner une équation cartésienne.
Réponse : C'est le plan passant par l'origine et orthogonal à $\overrightarrow{u}$, et d'équation cartésienne $x + z = 0$.

Exercice 5

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires de l'espace. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs.
1. Montrer que $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$.
Réponse : Si ce produit vectoriel était nul, $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, c'est à dire il existerait λ tel que $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$. On en tire $(2 - \lambda)\overrightarrow{u} = (\lambda - 3)\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ seraient donc colinéaires.

2. Montrer (sans calculs) que $\big((2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\big) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Réponse : $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ est orthogonal à $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, il est donc orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et colinéaire à $\overrightarrow{w}$, c'est pourquoi son produit vectoriel avec $\overrightarrow{w}$ est nul.