Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

Mathematiques 02

Corrigé du partiel 2 – 22 Novembre 2013

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

Exercice 1 : $y = x - 8$, vecteur directeur $(1,1)$ et $\left\{ \begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = -3 + t \end{array} \right.$.

Exercice 2 : Les solutions sont $\pm 2e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{3} \pm i$.

Exercice 3 : $-x - ix = x\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, ou alors $-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le cas où x est négatif.

$\sin x - i\cos x$ c'est $-i(\cos x + i\sin x)$, c'est donc $e^{i(x - \frac{\pi}{2})}$.

$e^{\sin(x)e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}} = e^{i\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x)} = e^{-\sin^2(x)}e^{i\sin(x)\cos(x)}$ (le module c'est $e^{-\sin^2(x)}$).

Exercice 4 question 1 : $|z|^2 = z\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Exercice 4 question 2 : O et A appartiennent à $(\mathcal{C})$ d'équation $\dfrac{z}{z-2} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4 question 3 : $\bar{z} \in (\mathcal{C})$ car $\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}-2}$ est le conjugué de $\dfrac{z}{z-2}$. Donc $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des réels.

Exercice 4 question 4 : La partie réelle des éléments de $i\mathbb{R}$ est nulle. Donc, en utilisant le résultat de la question 1, l'équation de $(\mathcal{C})$ est

$$\frac{z}{z-2} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}-2} = 0.$$

En remplaçant z et $\bar{z}$ par leurs valeurs on trouve

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

Exercice 4 question 5 : $(x-1)^2 + y^2 = 1$. C'est la même équation que celle de $(\mathcal{C})$. D'autre part, $MB = 1$ est l'équation du cercle de centre B et de rayon 1.

Exercice 4 question 6 : 0 et 1.

Exercice 5 question 1 : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ c'est à dire $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 5 question 2 : On fait $a + b = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On obtient (en ne gardant que les parties réelles) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

En remplaçant $\sin^2(\theta)$ par $1 - \cos^2(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$ par $(1 - \cos^2(\theta))^2$ qu'on développe, on obtient la formule demandée.

Exercice 5 question 3 : $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5 question 4 : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.