

Corrigé du test 2 sujet 1

Question 1. (démonstration par récurrence)

Soit une suite u_n définie par :

$$u_0 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

a) En se servant de cette définition, calculer u_1 et u_2 .

C'est $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{2}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, u_n est entier.

$u_3 = 8$ est entier et, pour tout entier n tel que u_n soit entier, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est entier.

Question 2. (étude de fonction)

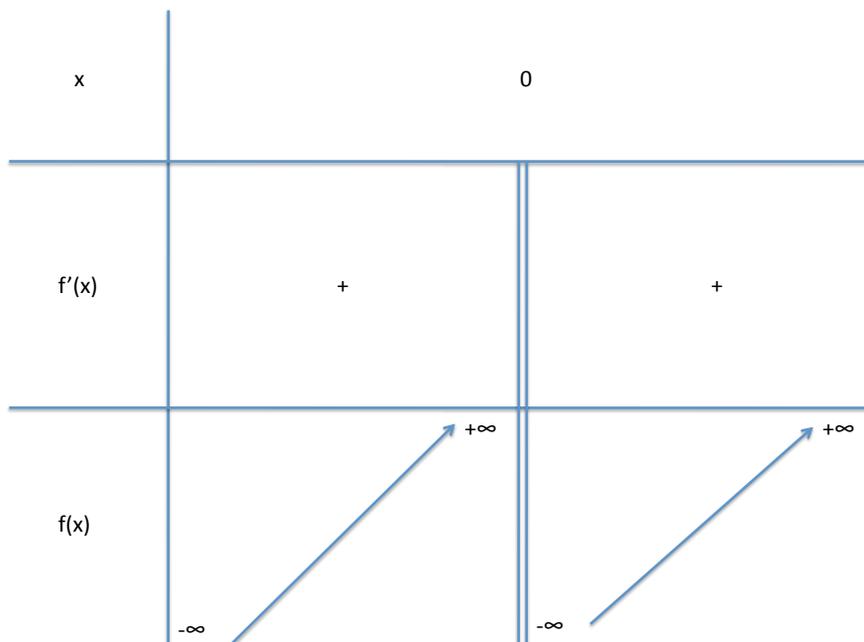
Faire l'étude (domaine de définition, parité, dérivée, tableau de variations et allure de la courbe) de la fonction $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$.

Elle est définie sur \mathbb{R}^* c'est à dire pour tout $x \neq 0$.

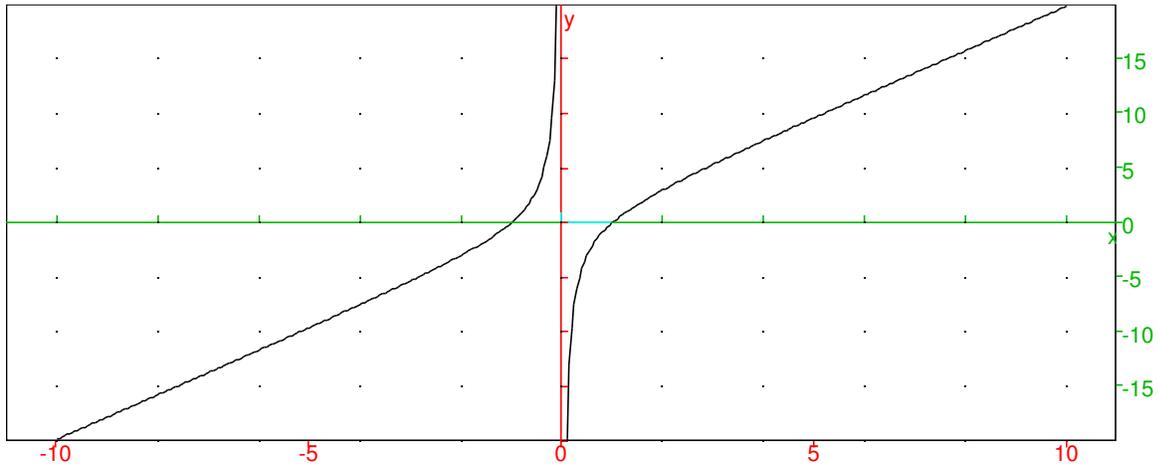
Elle est impaire : $f(-x) = -f(x)$.

Sa dérivée $f'(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ est positive car 2 et x^2 sont positifs.

Son tableau de variations est :



Sa courbe :



Question 3. (valeurs absolues)

Résoudre l'équation $|x + 1| = 2x + 1$ (rappel : $|x|$ vaut x si $x \geq 0$ et vaut $-x$ sinon).

Si $x + 1 \geq 0$ c'est à dire si $x \geq -1$, c'est l'équation $x + 1 = 2x + 1$. Sa solution est

$$\begin{cases} x = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ et ces deux conditions sont compatibles.}$$

Si $x + 1 < 0$ c'est à dire si $x < -1$, c'est l'équation $-x - 1 = 2x + 1$. Sa solution est

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ x < -1 \end{cases} \text{ et ces deux conditions sont contradictoires.}$$

Au final, $x = 0$.