Corrigé du test 2 sujet 4

Question 1. (démonstration par récurrence)

Soit une suite u_n définie par :

$$u_0 = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

a) En se servant de cette définition, calculer u_1 et u_2.

C'est $\frac{4}{3}$ et 5.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, u_n est entier.

$u_2 = 5$ est entier et, pour tout entier n tel que u_n soit entier, $u_{n+1} = 3u_n + 1$ est entier.

Question 2. (étude de fonction)

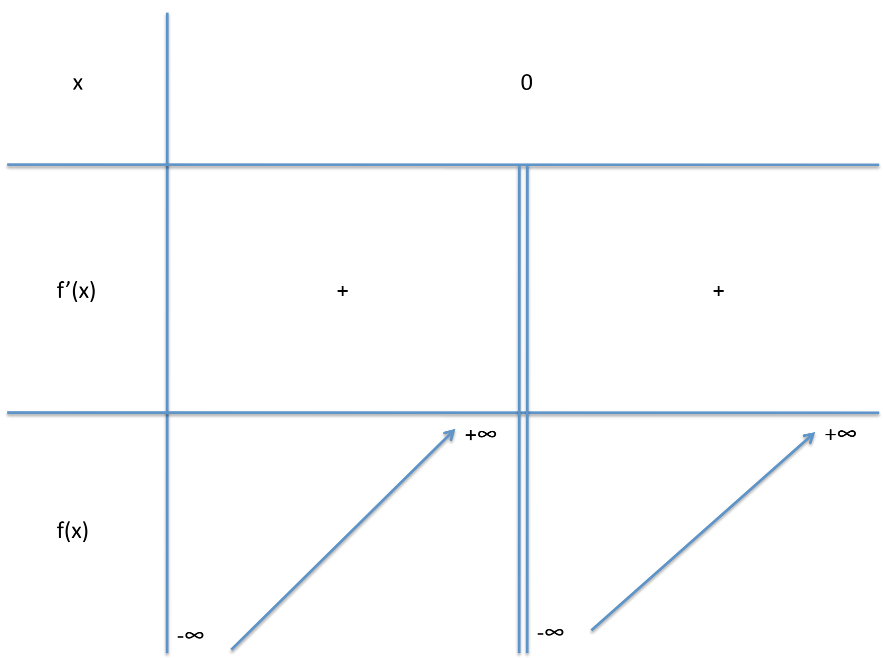
Faire l'étude (domaine de définition, parité, dérivée, tableau de variations et allure de la courbe) de la fonction $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ c'est à dire pour tout $x \neq 0$.

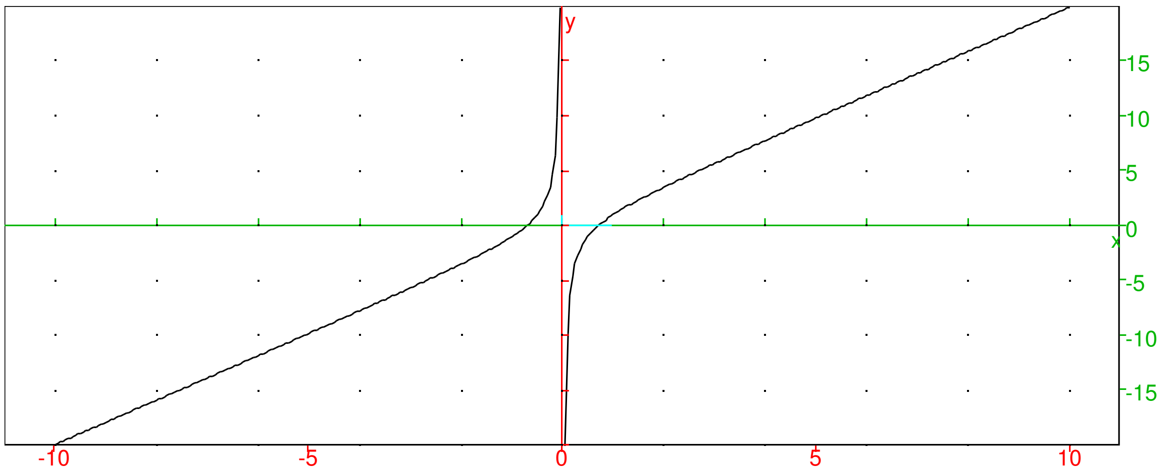
Elle est impaire : $f(-x) = -f(x)$.

Sa dérivée $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ est positive car 2 et x^2 sont positifs.

Son tableau de variations est :



Sa courbe :



Question 3. (valeurs absolues)

L'équation $|2x+1| = x-1$ a-t-elle des solutions ? (rappel : $|x|$ vaut x si $x \geq 0$ et vaut $-x$ sinon).

Si $2x+1 \geq 0$ c'est à dire si $x \geq -\frac{1}{2}$, c'est l'équation $2x+1 = x-1$. Sa solution est

$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ et ces deux conditions sont contradictoires.

Si $2x+1 < 0$ c'est à dire si $x < -\frac{1}{2}$, c'est l'équation $-2x-1 = x-1$. Sa solution est

$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ et ces deux conditions sont contradictoires.

Aucun réel x n'est donc solution de l'équation $|2x+1| = x-1$.