Université de Provence 2008–2009

Mathématiques Générales I : sujet et corrigé

Durée : deux heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

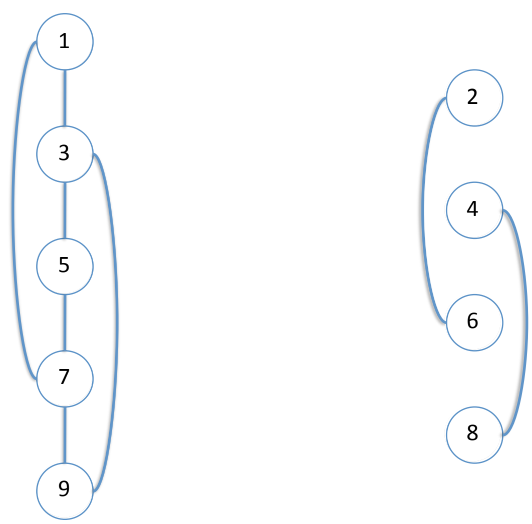
Examen deuxième session septembre 2009

– I –

1. Dessiner le graphe simple dont les sommets sont les nombres entiers de 1 à 9 où deux sommets sont reliés si et seulement si la somme des deux nombres est divisible par 4.

2. Définir le degré d'un sommet et énoncer le théorème du cours qui précise le nombre de sommets de degré impair. Combien a-t-on de sommets de degré impair ici ?

3. Ce graphe est-il connexe ? Si non déterminer ses composantes connexes.



Le degré d'un sommet est le nombre des arcs qui partent de ce sommet. D'après le théorème, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Sur ce graphe il y a quatre sommets de degré impair.

– II–

Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que l'on a toujours
$$A \cap B \subset A \cup B.$$
2. Que peut-on dire des deux ensembles A et B si on a $A \cap B = A \cup B$? Démontrer le résultat.

On a $A \cap B \subset A \cup B$ parce que les éléments de $A \cap B$ appartiennent à A et à B, et appartiennent donc à A ou B c'est à dire à $A \cup B$.

Si $A \cap B = A \cup B$ alors les éléments de A, du fait qu'ils appartiennent à $A \cup B$, appartiennent à $A \cup B$ donc à B, ce qui prouve que A est inclus dans B. On prouve de même que B est inclus dans A, donc $A = B$.

– III –

Calculer les racines cubiques de 27. Combien de ces racines ont une partie réelle négative ?

$3, 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $3e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Comme les parties réelles de $3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $3e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont égales à $\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $\cos(\frac{4\pi}{3})$ respectivement, toutes deux sont égales à $-\frac{1}{2}$. Il y a donc deux racines de partie réelle négative.

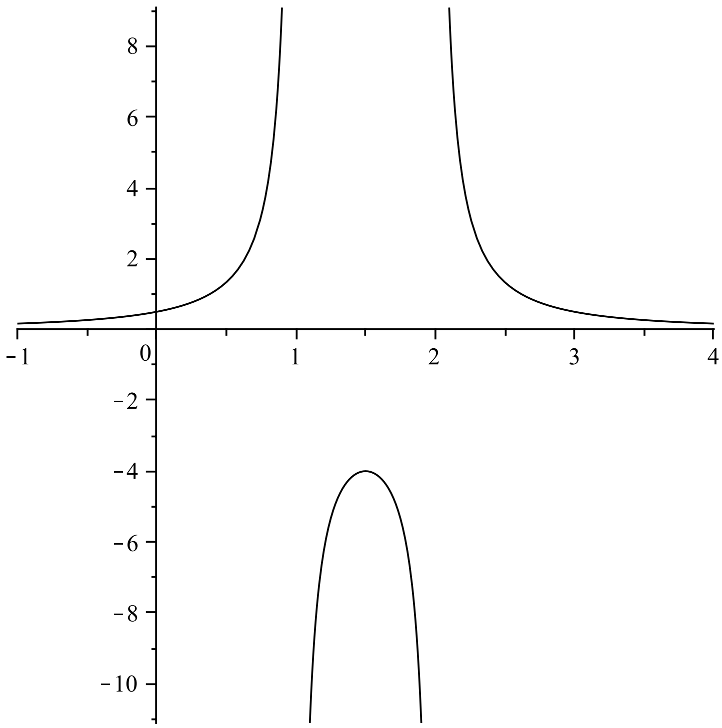
– IV –

Soit g la fonction réelle définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

1. Donner le domaine de définition D_g de g.
2. Etudier la fonction g (les limites, le tableau de variation et le graphe).
3. Déterminer l'ensemble image.
4. La fonction g est-elle injective sur D_g ? Est-elle surjective sur R ?
5. Soit la fonction $h :]2, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $h(x) = g(x), \forall x \in]2, +\infty[$. Montrer que h est bijective, puis donner sa réciproque.

Elle est définie pour $x \neq 1, 2$ (valeurs qui annulent le dénominateur). Comme elle a pour dérivée $\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		3/2		2		$+\infty$
f'(x)		+	||	+	0	-	||	-	
f(x)	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0



On voit sur le tableau de variations que l'image de g est $]-\infty;-4]\cup]0;+\infty[$;
que g n'est pas injective (difficile de trouver un exemple numérique, mais en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires il existe un $x_1 < \frac{3}{2}$ tel que $f(x_1) = -5$ (par exemple) et un $x_2 > \frac{3}{2}$ tel que $f(x_2) = -5$) ;
que g n'est pas surjective : il n'existe pas de x tel que $g(x) = 0$ (par exemple).
Par contre h est bijective (parce que sur le tableau de variations, l'intervalle $]2,+\infty[$ pour les x correspond à l'intervalle $]0,+\infty[$ pour les $f(x)$).

La fonction réciproque est définie par $h^{-1}(x) = \frac{3+\sqrt{1+\frac{4}{y}}}{2}$.

– V –

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'(t) + ty(t) = te^{-t^2}$$

1. Calculer la solution générale de l'équation homogène associée.
2. Appliquer la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire la solution de l'équation (E) qui vérifie $y(0) = 0$.

1. $y = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ (avec C constante).
2. En reportant $y = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$, avec C variable, dans l'équation différentielle (E) et en simplifiant, on obtient $C'e^{-\frac{t^2}{2}} = te^{-t^2}$ donc $C = te^{-\frac{t^2}{2}}$ et $C = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, ce qui prouve qu'une solution particulière est $y = Ce^{-\frac{t^2}{2}} = -e^{-t^2}$.

   La solution générale de (E) est $y = -e^{-t^2} + Ce^{-\frac{t^2}{2}}$.
3. Celle qui vérifie $y(0) = 0$ est $y = -e^{-t^2} + e^{-\frac{t^2}{2}}$.