Université Aix-Marseille
Licence PC

7◁04◁2014

# Corrigé du test

---

**Exercice 1** *(systèmes d'équations linéaires)*

1. *Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles $x$, $y$, $z$ et $t$*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & - & 2t & = & 3 \\ x & + & y & - & 2z & & & = & -1 \\ & & y & & & - & 2t & = & 1 \end{array}\right.$$

*Réponse : Dans le cas de quatre équations, la méthode du pivot consiste (en général) à éliminer $x$ des équations 2, 3 et 4, puis à éliminer $y$ des équations 3 et 4, puis éliminer $z$ de l'équation 4.*
*Éliminons $x$ de l'équation 3, en retranchant la ligne 1 de la ligne 3 :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & - & 2t & = & 3 \\ & - & y & - & 3z & + & 4t & = & -3 \\ & & y & & & - & 2t & = & 1 \end{array}\right.$$

*Éliminons $y$ des équations 3 et 4, en retranchant la ligne 2 de la ligne 3 et en ajoutant la ligne 2 à la ligne 4 :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & - & 2t & = & 3 \\ & & & - & 6z & + & 6t & = & -6 \\ & & & & 3z & - & 4t & = & 4 \end{array}\right.$$

*Éliminons $z$ de l'équation 4, en multipliant par 2 la ligne 4 et en lui ajoutant la ligne 3 :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & - & 2t & = & 3 \\ & & & - & 6z & + & 6t & = & -6 \\ & & & & & - & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

*La quatrième équation permet de calculer $t = -1$. La troisième donne $-6z - 6 = -6$ donc $z = 0$. La deuxième donne $-y + 2 = 3$ donc $y = -1$. La première donne $x - 2 + 4 = 2$ donc $x = 0$, et la solution est*

$$\boxed{x = 0}\ \boxed{y = -1}\ \boxed{z = 0}\ \boxed{t = -1}.$$

2. *Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$ où*

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad et \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

*Réponse : $AX = 0$ équivaut au système d'équations*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & az & = & 0 \end{array}\right.$$

*N'appliquons pas la méthode du pivot mais calculons successivement $x$, $y$ et $z$ (méthode par substitution). D'après la deuxième équation on a*

$$x = -y - z.$$

*Remplaçons $x$ par cette valeur dans la première et la troisième équation : on obtient $-ay-az-y+z=0$ et $-y-z-y+az=0$ ce qui fait*

$$(S')\left\{\begin{array}{rrrrl} - & (a+1)y & - & (a-1)z & = & 0 \\ - & 2y & + & (a-1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

*La somme de ces deux équations donne $-(a+3)y = 0$. Sauf dans le cas $a=-3$, on en déduit $y=0$. On remplace $y$ par $0$ dans les deux équations du système $(S')$, et on en déduit $z=0$, sauf si $a=1$. La solution de $(S)$ est donc (sauf si $a=-3$ ou $1$) :*

$$\boxed{x=y=z=0}.$$

*<u>Cas $a=1$</u> : les équations du système $(S')$ donnent $y=0$, la solution de $(S)$ est donc*

$$\boxed{x=-z}\ \boxed{y=0}\ \boxed{z \text{ quelconque}}.$$

*<u>Cas $a=-3$</u> : les équations du système $(S')$ donnent $y=-2z$, et comme on a vu que $x=-y-z$ on a $x=z$. La solution de $(S)$ est :*

$$\boxed{x=z}\ \boxed{y=-2z}\ \boxed{z \text{ quelconque}}.$$

3. *On suppose $a=-3$. Soit $f$ l'application linéaire associée à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de $Kerf$ et une base de $Imf$.*

*Réponse : Le noyau $Kerf$ est l'ensemble des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $f(X)=0$ c'est à dire $AX=0$. Il s'obtient en utilisant le résultat de la question précédente dans le cas $a=-3$ : $AX=0$ équivaut à $X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$ avec $z$ quelconque. Comme $\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, le vecteur de base de $Kerf$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (autrement dit $Kerf$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$).*

*D'autre part $Imf$ est l'ensemble des $f(X)$ (pour tout $X \in \mathbb{R}^3$). Autrement dit c'est l'ensemble des*

$$AX = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x-y+z \\ x+y+z \\ x-y-3z \end{pmatrix}.$$

*Ces vecteurs sont égaux à*

$$x\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

*Mais $Kerf$ est de dimension 2 d'après le théorème noyau-image, autrement dit c'est un plan vectoriel. Pour obtenir deux vecteurs de base (ou deux vecteurs directeurs) d'un plan vectoriel, il suffit de choisir deux vecteurs non colinéaires dans ce plan : par exemple les vecteurs $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

***Exercice 2*** *(bases)*
*On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique. Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Les vecteurs* $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$ *et* $\vec{c} = (1, -4, 2)$ *forment-ils une base de* $\mathbb{R}^3$ *?*

   *Réponse : Non, le premier est la somme des deux autres. Autre méthode : calculer le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et obtenir* $0$.

2. *On définit l'ensemble* $F = \{(s, t, 3s + t) \text{ avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$. *Déterminer une base de* $F$.

   *Réponse :* $\boxed{\{(1, 0, 3), (0, 1, 1)\}}$ *puisque* $(s, t, 3s + t) = s(1, 0, 3) + t(0, 1, 1)$.

3. *On définit l'ensemble* $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0 \text{ et } x - 3y + z = 0\}$.

   *(a) Déterminer une base de* $H$ *et en déduire la nature géométrique de* $H$.

   *Réponse :* $\boxed{\{(1, -1, -4)\}}$ *puisque* $y = -x$, $z = 3y - x = -4x$ *et* $(x, y, z) = (x, -x, -4x) = x(1, -1, -4)$. *C'est la droite vectorielle de vecteur directeur* $(1, -1, -4)$.

   *(b) Déterminer une représentation paramétrique de* $H$.

   *Réponse :* $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & -t \\ z & = & -4t \end{array} \right.$

***Exercice 3*** *(courbes)*

1. *Etudier la courbe paramétrée* $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{array} \right.$

   *Plus précisement, on demande de :*

   *- Définir un ensemble d'étude ;*

   *- Faire le tableau de variations de* $x(t)$ *et* $y(t)$.

   *Réponse : Étudions-la sur* $[0; \pi]$ *puisque les fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont* $2\pi$*-périodiques et respectivement paire et impaire. On a* $x'(t) = -\sin t$ *et* $y'(t) = 2 \cos t$.

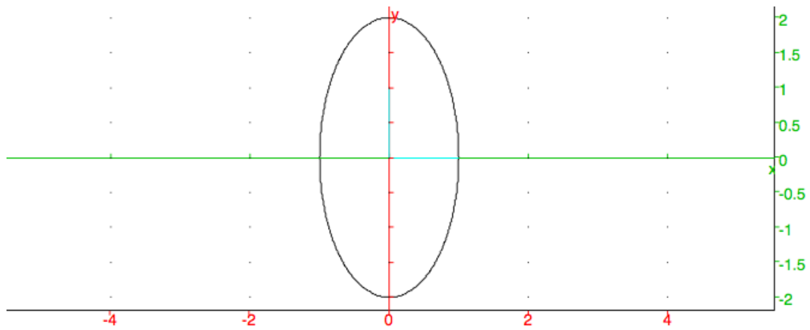
| t | 0 | | π/2 | | π |
|---|---|---|---|---|---|
| x' | 0 | | – | | 0 |
| Y' | | + | 0 | – | |
| x | 1 | ↘ | 0 | ↘ | -1 |
| y | 0 | ↗ | 2 | ↘ | 0 |

2. *En déduire que la courbe d'équation paramétrique* $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{array} \right.$ *possède deux tangentes parallèles à l'axe des* $x$ *et deux tangentes parallèles à l'axe des* $y$.

   *Réponse : En* $t = \dfrac{\pi}{2}$ *(c'est à dire au point* $(x, y) = (0, 2)$*), l'ordonnée* $y(t)$ *est maximale donc la tangente est parallèle à l'axe des* $x$. *De même qu'en* $t = -\dfrac{\pi}{2}$ *par symétrie.*

*En $t = 0$, l'abscisse $x(t)$ est maximale donc la tangente est parallèle à l'axe des $y$.*
*En $t = \pi$, l'abscisse $x(t)$ est minimale donc la tangente est parallèle à l'axe des $y$.*

3. *Tracer cette courbe.*
*Réponse : D'après le tableau de variations on peut placer les points $(x, y) = (1, 0)$, $(0, 2)$ et $(-1, 0)$. D'après l'imparité de la fonction $y$, on peut placer le symétrique de $(0, 2)$ c'est à dire $(0, -2)$.*




4. *En donner une équation cartésienne. Quelle est cette courbe ?*
*Réponse :* $\boxed{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}$ *puisque* $x^2 + \frac{y^2}{4} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. *C'est une ellipse.*