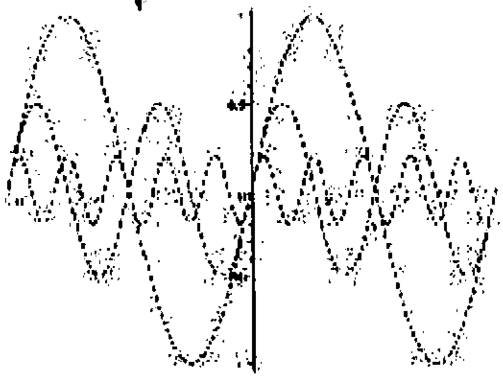
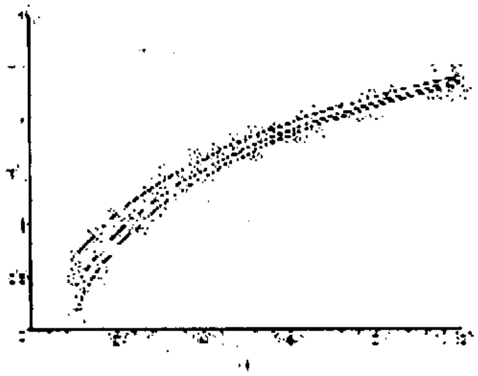
Corrigé de la planche 3

Exercice 1



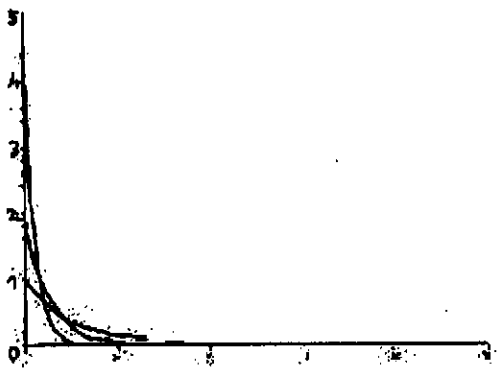
$\frac{\sin(nx)}{n}$

Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la première question. On voit que la suite f_n converge uniformément vers 0 (le maximum de la valeur absolue de $f_n$vaut 1/n).



$\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)$

Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la deuxième question. La suite f_n converge vers ln. La convergence est uniforme: la valeur absolue de $f_n(x)$-ln(x), c'est à dire ln(1+1/(nx)), est plus petite que 1/nx et le maximum (pour x appartenant à [1,+infini[) de 1/nx est 1/n.

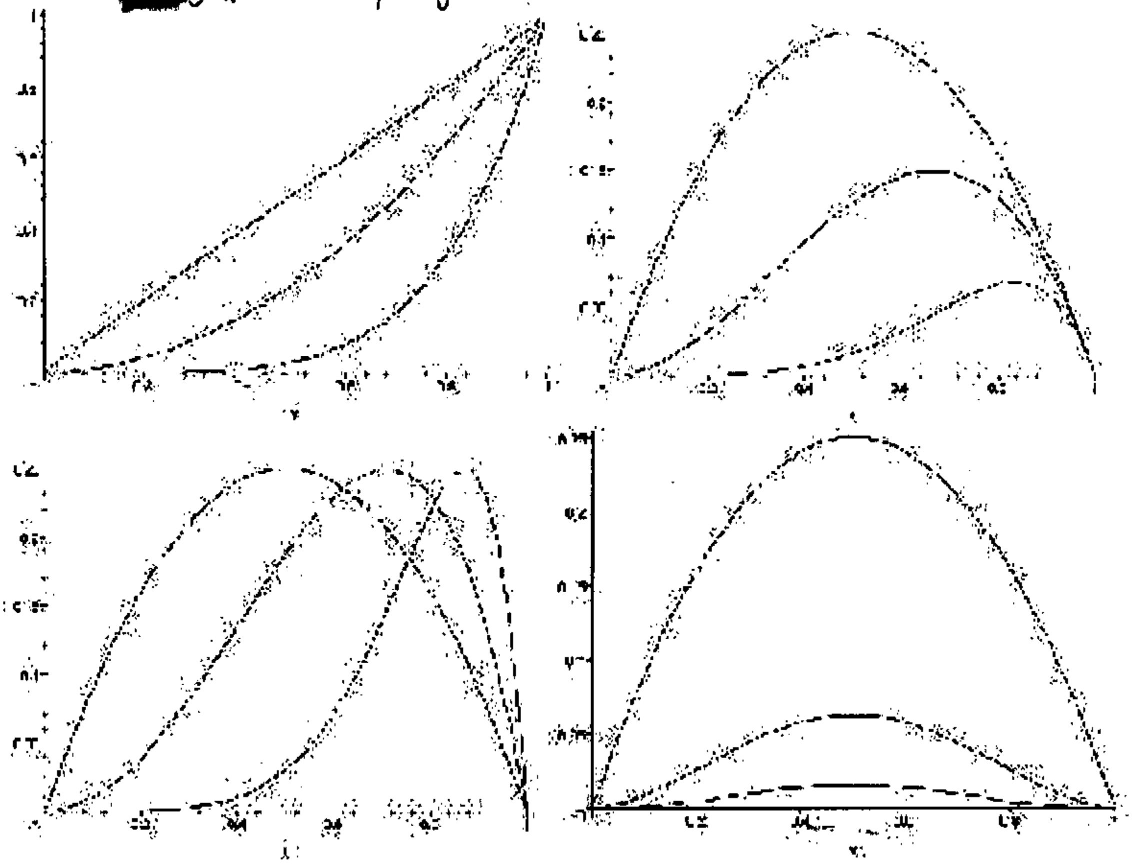


$n^{\alpha} e^{-nx}$

Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la troisième question (la courbe de f_5 remonte (pour $\alpha = 1$) jusqu'à 5). La suite f_n ne converge pas: $f_n(0)$ tend vers +infini pour $\alpha > 0$

Elle converge si $\alpha \leq 0$

Exercice 2 $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = x^n(1-x)$, $h_n(x) = x^n(1-x^n)$, $i_n(x) = x^n(1-x)^n$



Ce sont les fonctions f_1, f_2, f_5,puis g_1, g_2, g_5, puis h_1, h_2, h_5, puis i_1, i_2, i_3. La suite f_n converge vers une fonction discontinue qui vaut 0 pour x dans l'intervalle [0,1[, et qui vaut 1 en x=1. La convergence ne peut pas être uniforme: si elle l'était, la limite de f_n serait continue.

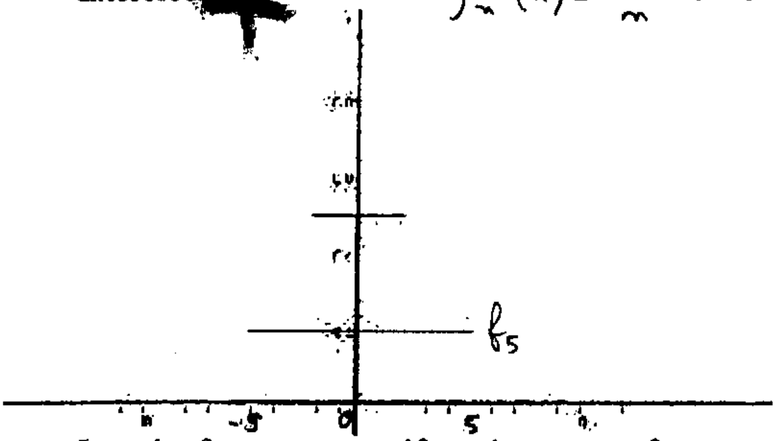
Par contre la suite g_n converge uniformément vers 0: pour le démontrer, il faut vérifier que le maximum de la valeur absolue de g_n (c'est à dire de g_n) tend vers 0; et pour connaître ce maximum, le plus simple est de faire une étude de fonction (réponse: ce maximum vaut $n^n/(n+1)^{n+1}$, il est plus petit que $1/(n+1)$ donc tend bien vers 0).

La suite h_n converge simplement vers 0 (c'est à dire, quand l'abscisse x est fixée, l'ordonnée f(x) tend vers 0 quelle que soit la position de x dans l'intervalle [0,1]). La suite h_n ne converge pas uniformément vers 0: le maximum de h_n vaut ¼.

La suite i_n converge uniformément vers 0: comme i_n vaut x(1-x) à la puissance n, son maximum vaut ¼ à la puissance n.

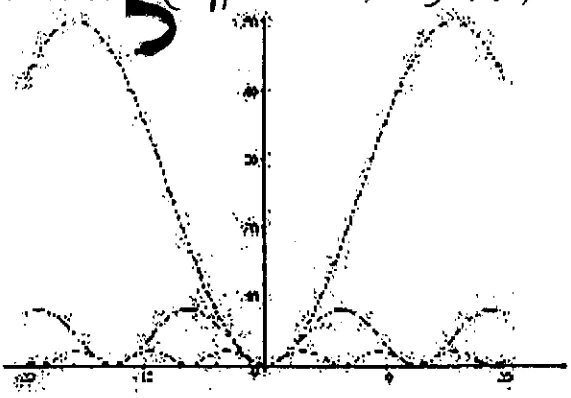
Si on remplace [0,1] par [0,1[, ça ne change pas grand chose à part que f_n cette fois-ci converge simplement vers 0. Par contre si on remplace [0,1] par [0,a], avec a strictement plus petit que 1, les quatre suites de fonctions convergent uniformément vers 0.

Exercice 4 $f_n(x) = \frac{1}{n}$ sur $[-n ; n]$, et 0 ailleurs



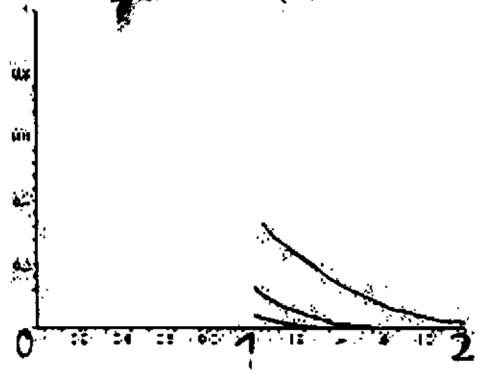
La suite f_n converge uniformément vers 0.

Exercice 5 (application) $f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$



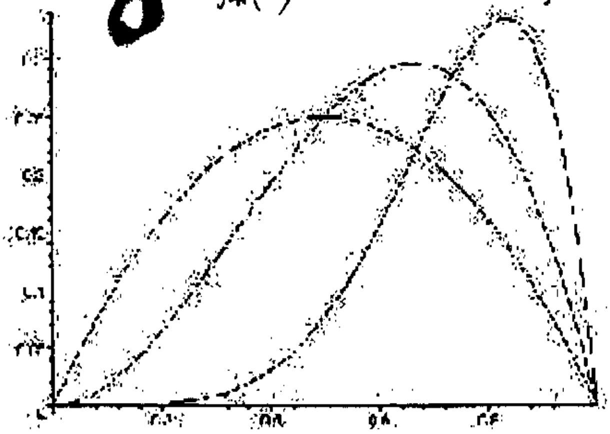
La suite f_n converge simplement vers f(x)=$x^2/2$; mais f_n(2nPi) vaut 0, et f_n(2nPi)-f(2nPi) tend vers -infini.

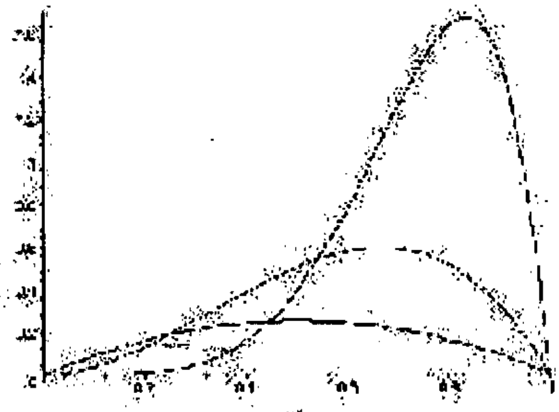
Exercice 7 $f_n(x) = e^{-nx^2}$ pour $x \in [1;2]$



L'intégrale de la fonction e^{-nx^2}, dont on a représenté la courbe pour n=1, 2 et 3, tend vers 0 puisque cette suite de fonctions converge uniformément vers 0 quand x appartient à l'intervalle [1,2].

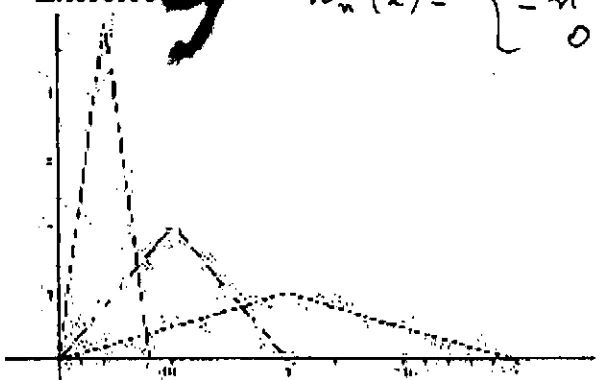
Exercice 8 $f_n(x) = n\, x^n(1-x)$ $g_n(x) = n^2 x^n (1-x)$





La suite f_n et la suite g_n convergent simplement vers 0. La convergence n'est pas uniforme (le maximum remonte). Ce qui les distingue, c'est que l'intégrale de la première tend vers 0 alors que l'intégrale de la deuxième tend vers 1: c'est pas l'intégrale de la limite.

Exercice 9 $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{sur } [0; \frac{1}{n}] \\ -n^2 x + 2n & \text{sur } [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{sur } [\frac{2}{n}; 1] \end{cases}$



La suite h_n converge simplement vers 0. Elle ne peut pas converger uniformément: si c'étit le cas, son intégrale tendrait vers 0, or elle vaut 1.