

TD 6
 Courbes planes paramétrées

0.1 Paramétrage cartésien

Exercice 1 Soit (C) la courbe définie par la représentation

$$\begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{cases}$$

1. Etudier la partie de la courbe qui correspond à $t \in [-\pi, +\pi]$. On notera (Γ) cette partie de (C) .
2. Démontrer que (C) se déduit de (Γ) par des translations que l'on précisera.

Remarque 2 Cette courbe est appelée **cycloïde**. Elle représente le lieu géométrique d'un point M fixé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite. Imaginez une tête de clou plantée dans le pneu d'un vélo.

Exercice 3 Etudier la courbe définie par la représentation

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

Remarque 4 Cette courbe est appelée **épicycloïde**. Elle représente le lieu géométrique d'un point M fixé sur un cercle (c) de rayon r qui roule sans glisser sur un cercle (C) de rayon $R > r$, avec (c) à l'extérieur de (C) . Lorsque (c) se trouve à l'intérieur de (C) , la courbe obtenue est appelée **hypocycloïde**.

Exercice 5 Etudier les courbes suivantes

$$(C_1) \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad (C_2) \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Remarque 6 (C_1) est appelée la **strophoïde**, du nom grec "strophon" qui signifie lacet. (C_2) est appelée **folium de Descartes**.

0.2 Paramétrage polaire

Exercice 7 Courbes classiques

r_0, θ_0 et a désignent trois réels. Reconnaître et représenter les courbes d'équation polaire

$$r = r_0 \quad \theta = \theta_0 \quad r = a \cos(\theta) \quad r = a \cos(\theta - \theta_0) \quad r = \frac{a}{\cos(\theta)} \quad r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

Exercice 8 Courbes fermées

1. **Cardioïde**

Etudier la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos \theta$.

2. Etudier la courbe d'équation polaire

$$r = \cos(2\theta).$$

Exercice 9 Courbes ayant des branches infinies

1. *Spirale logarithmique*

Etudier la courbe d'équation polaire

$$r = \exp(\theta)$$

2. On considère la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{2}{1 + \cos(\theta)}$$

(a) Quelle est la nature de cette courbe ?

(b) Etudier cette courbe.

0.3 Courbes usuelles

Exercice 10 Soit (C) la courbe définie pour tout $t \in [0, 2\pi]$ par la représentation en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 \sin(t) \end{cases}$$

1. Reconnaître et représenter (C) .

2. Déterminer une équation cartésienne de (C) dans un repère à préciser.

Exercice 11 On considère (C) d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$$

1. Reconnaître et représenter (C) .

2. Déterminer une représentation paramétrée en cartésienne de (C) .

Exercice 12 On considère (C) la courbe d'équation cartésienne

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître et représenter (C) .

2. Déterminer une représentation paramétrée en cartésienne de (C) .

Exercice 13 On considère (C) la courbe d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

1. Reconnaître et représenter (C) .

2. Déterminer une représentation paramétrée en cartésienne de (C) .