Université Aix-Marseille
Martine Quinio 2013

Equations différentielles

---

1 Equations différentielles du premier ordre linéaires

Les équations du type : (E)

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

se résolvent sur tout intervalle I de x où les fonctions a, b, c sont définies et où a ne s'annule pas.

1.1 Méthode de résolution

1) On résout léquation homogène ; on dit aussi léquation sans second membre :

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = 0$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$z(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)})dx$$

2) On cherche une solution particulière y_0

Elle pourra être obtenue, si nécessaire, par méthode de variation de la constante *:*

Cette méthode consiste à poser une fonction auxiliaire : $K(x) = \dfrac{y(x)}{z(x)}$: ceci revient à poser les solutions $y(x) = z(x)K(x)$:

Alors $y'(x) = z'(x)K(x)+z(x)K'(x)$, on reporte dans l'équation (E) et on obtient une équation comportant K', ce qui permet d'obtenir K par intégration ; si on laisse la constante d'intègration, on obtient directement toutes les solutions de (E) ; sinon, on obtient une solution particulière.

3) Les solutions de l'équation sont :

$$y\left(x\right) = z(x) + y_0(x)$$

Les courbes des fonctions solutions s'appellent **Courbes intégrales**

4) Si une condition est donnée : $y\left(A\right) = B$

Alors il y a solution unique

Ainsi, une seule courbe intégrale passant par un point donné de coordonnées (A,B)

Exemple 1 *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left(x^2 - 1\right) y'\left(x\right) + 2xy\left(x\right) = x^2$$

(on précisera le ou les intervalles de résolution)

les intervalles de résolution sont I=]-∞; -1[; J=]-1; 1[; K =]1 ;+∞[

L'équation homogène a pour solutions $z(x) = K\exp(-\int \frac{2x}{(x^2-1)}dx)$

$= K\exp(-\ln\left|x^2 - 1\right|) = K\exp(\ln(\frac{1}{|x^2-1|})$

$$z(x) = \frac{K}{(x^2 - 1)}$$

K réel

Pour obtenir les solutions on emploie la méthode de variation de la constante :
D'où on pose :

$$y(x) = \frac{K(x)}{(x^2-1)}$$

Alors : $y\prime(x) = \dfrac{K'(x)\left(x^2-1\right) - 2xK(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

On remplace dans l'équation de départ y'(x) par cette expression ety(x) par :

$$y(x) = \frac{K(x)}{(x^2-1)}$$

et tout se simplifie ; l'équation :

$$\left(x^2-1\right) y'\left(x\right) + 2xy\left(x\right) = x^2$$

Devient : $K\prime(x) = x^2$
Donc : $K(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$
On reporte dans (E) et on obtient donc les solutions

$$y(x) = \frac{K(x)}{(x^2-1)} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + C}{(x^2-1)} = \frac{C}{(x^2-1)} + \frac{x^3}{3\left(x^2-1\right)}$$

Quelle que soit la méthode, on obtient les solutions de (1) sur un tel intervalle I :

$$y(x) = K\exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right) + y_0(x)$$

$$ay\prime(x) + by(x) = f(x)$$

1.2 Cas des équations à coefficients constants

Où : a et b sont des constantes, $a \neq 0, f$ une fonction usuelle :
$f_1(x) = P(x)$ un polynôme
$f_2(x) = asin\varpi x + bcos\varpi x$
$f(x) = e^x f_i(x)$

Les solutions de l'équation

$$ay\prime(x) + by(x) = f(x)$$

sont :

$$y(x) = K\exp\left(-\frac{b}{a}x\right) + g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction de même type que celle du second membre.
On obtient g par identification.

Exemple 2 *L'équation différentielle* $2y\prime(x) + y(x) = x$:

Les solutions de l'équation homogène associée sont : $y_1(x) = Ke^{-\frac{1}{2}x}$;
Une solution particulière est un polynôme du premier degré : $y_0(x) = ax + b$:
On obtient facilement par identification : $a = 1$ et $b = -2$:
Pour cela, on remplace dans L'équation différentielle :
$2y\prime(x) + y(x) = x$:
$y_0(x)$ par $ax + b$, $y\prime_0(x)$ *par* a

Les solutions de l'équation différentielle $2y\prime(x) + y(x) = x$ *sont, sur* $\mathbb{R}$:

$$y(x) = x - 2 + Ke^{-\frac{1}{2}x}$$

Exemple 3 *L'équation différentielle*

$$y\prime(x)cosx + y(x)sinx = 1$$

a pour solution sur tout intervalle I *de* x *où* cos *ne s'annule pas : .*$y(x) = K\cos x + \sin x$. *En effet : sur* $I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, les solutions de l'équation homogène associée :

$y\prime(x)cosx + y(x)sinx = 0$ sont : $\mathrm{y}_1(x) = K\exp(-\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx) = K\exp(\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx) = K\exp(\ln|\cos x|) = K\cos x$:

Remarquons, pour enlever la valeur absolue, que sur I, cos garde un signe constant. Il n'est pas utile d'écrire $\mathrm{y}_1(x) = K\cos x$ *ou* $\mathrm{y}_1(x) = -K\cos x$, *K étant indéterminée.*

Enfin, il est facile de vérifier que la fonction sin est une solution particulière.

Remarque 1 La solution générale d'une équation differentielle linéaire est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière ; dans tout exercice à résoudre, un minimum de rédaction claire et lisible sera exigé, phrase avec sujet verbe etc ; il faut en particulier respecter impérativement les noms donnés aux variables et aux fonctions : dans les autres disciplines scientifiques, ce chapitre occupe une place importante, il est bon de savoir que les notations employées pourront être diverses et variées : mais un étudiant averti en vaut deux...au moins.

1.3 Equations à variables séparables

Certaines équations (fréquentes) sont de la forme : (ou s'y ramènent)

$$f(y).y\prime(t) = g(x).x\prime(t)$$

*On dit que l'**équation est à variables séparables ;***

Exemple 4 *Soit à résoudre l'équation :* $y^2(t)y'(t) = x(t)x'(t)$: *(E)*

La notation $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$ *et* $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ *permet d'écrire :*

(E) : $y^2(t)dy = x(t)dx$: *alors, sur tout intervalle contenant t, tel que les fonctions y et x soient définies, on a par intégration :*

$\frac{1}{3}y^3(t) = \frac{1}{2}x^2(t) + C$; *les solutions sont données sous forme de courbes.*

Exemple 5 *Loi de refroidissement de Newton*
Soit T_1 *la température initiale d'un corps et* T_0 *la température constante du milieu environnant avec* $T_0 < T_1$. *On cherche la loi qui régit le refroidissement du corps. L'expérience montre que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à* $T - T_0$, *on obtient ainsi :*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

En déduire l'expression de T *en fonction de* t, T_0, T_1. *Quelle est la limite de* T *quand* t *tend vers* $+\infty$ *?*

En écrivant :$\dfrac{dT}{T - T_0} = -kdt$, *on a séparé fonction* T *et variable* t *:*
ln$(T - T_0) = -kt + c$,*d'où*
$T - T_0 = K\exp(-kt)$
Comme pour $t = 0, T = T_1$,*on en déduit :*

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\exp(-kt)$$

Donc la limite de T *quand* t *tend vers* $+\infty$ *est* T_0 : *température du milieu environnant*

1.4 Autres exemples

Résoudre l' équation différentielle :

$$y\prime + 3y = 3\sin x + \cos x$$

L'équation homogène a pour solutions :

$$z(x) = Kexp(-3x)$$

K réel quelconque, conformément au cours.
Une solution particulière évidente est $y_0(x) = \sin x$
Les solutions de l'équation sont
$y(x) = z(x) + y_0(x) = \sin x + Kexp(-3x)$,*K réel quelconque.*

Exemple 6 *Résoudre l' équation différentielle :*

$$x\prime + 2x = t^2$$

L'équation homogène a pour solutions :
$z(t) = Kexp(-2t)$, *K réel quelconque,*
Une solution particulière est $x_0(t) = at^2 + bt + c$ *:*
On obtient par identification :
$x_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
Et donc :
Les solutions de l'équation sont :

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Kexp(-2t)$$

2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

***Cadre de travail** :*

$$ay" + by\prime + cy = f(x)$$

où a, b, c *constantes,* f *fonction usuelle : polynôme, trigo, exponentielle.*

2.1 Méthode de résolution

Les solutions de l'équation sont :

$$y\,(x) = \mathrm{z}(x) + y_0(x)$$

Où $\mathrm{z}(x)$ *est solution de* $ay" + by\prime + cy = 0$
$y_0(x)$ *est solution particulière ;*

Les courbes des fonctions solutions s'appellent Courbes intégrales
Si deux conditions sont données :
$y\,(A) = B$ *et* $y'\,(A) = C$
Alors il y a solution unique
1) On résout l'équation homogène ; pour cela on pose :

2.2 Equation caractéristique

En cherchant les solutions de

$$ay" + by\prime + cy = 0$$

sous forme exponentielle , on obtient $y_1(x) = Ke^{rx}$*, où r est solution de l'équation du second degré :*

$$ar^2 + br + c = 0$$

C'est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.
Discussion selon le nombre de solutions réelles de cette équation :

-Premier cas : il y a 2 solutions réelles : r_1 *et* r_2 *:*
Les solutions de $ay" + by\prime + cy = 0$ *sont :*

$$z(x) = Ke^{r_1 x} + K\prime e^{r_2 x}$$

pour toutes constantes K et K'.

-Deuxième cas : il y a 1 solution réelle r :
Les solutions de $ay" + by\prime + cy = 0$ *sont*

$$z(x) = (Kx + K')e^{rx}$$

pour toutes constantes K et K'.

-Troisième cas : il y a 2 solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ *et* $\overline{r}$;
Les solutions de $ay" + by\prime + cy = 0$ *sont*

$$z(x) = (K\cos\beta x + K'\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

pour toutes constantes K et K'.

En physique, on donnera plutôt une forme équivalente à celle-ci :
$z(x) = (K\cos\beta x + K'\sin\beta x)e^{\alpha x} = A\cos(\beta x + \varphi)$

$$z(x) = A\cos(\beta x + \varphi)$$

2.3 Recherche d'une solution particulière

Dans ce cours, première approche des équations du second ordre linèaires à coefficients constants et à second membre standard, on utilisera la méthode de recherche de solution particulière adaptée au second membre : f(x)
a) Un polynôme si f(x) est un polynôme;
b) Si f(x) est du type $A\cos\varpi x + B\sin\varpi x$, on cherchera les solutions particulières sous les formes équivalentes :
$y_0(x) = \alpha\cos\varpi x + \beta\sin\varpi x$ ou

$$y_0(x) = K\cos(\varpi x + \varphi)$$

Sauf dans le cas où $i\varpi$ ***est solution de l'équation caractéristique : alors***
$\boldsymbol{y}_0(x) = x(\alpha\cos\varpi x + \beta\sin\varpi x)$ ***ou***

$$\mathbf{y}_0(x) = Kx\cos(\varpi x + \varphi)$$

Exemple 7

$$x" + 4x = \cos 2t$$

On résout : $x" + 4x = 0$
On a

$$z(t) = A\cos(2t + \varphi)$$

On pose, puisque $i\varpi = 2i$ *est solution de l'équation caractéristique :*
$x_0(t) = t(a\cos 2t + b\sin 2t)$

On obtient

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + \frac{t}{4}\sin 2t$$

c) Si f(x) est le produit par une exponentielle $\mathrm{e}^{\lambda x}$d'une fonction de l'un des deux types précédents.

On pose

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}u(x)$$

Ce qui ramène à l'un des cas a) ou b)

Exemple 8 *a) Résoudre l'équation différentielle :*

$$y" + 2y\prime + 9y = 0$$

L'équation caractéristique associée est :$r^2 + 2r + 9 = 0$
Les solutions sont : $r = -1 + 2i\sqrt{2}$ *et* $r\prime = -1 - 2i\sqrt{2}$
D'après le cours, les solutions sont

$$y(x) = e^{-x}(K\cos(2x\sqrt{2}) + K'\sin(2x\sqrt{2}))$$

ou : de façon équivalente :

$$y(x) = e^{-x}(A\sin(2x\sqrt{2} + \phi))$$

Exemple 9 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$x" + 4x = \sin 2t$$

L'équation caractéristique associée est :$r^2 + 4 = 0$
Les solutions sont : $r = 2i$ *et* $r\prime = -2i$
L'équation homogène a pour solutions :
$z(t) = Kcos(2t) + K\prime sin(2t)$
Une solution particulière est $x_0(t) = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$
On obtient par identification :
$x_0(t) = -\frac{1}{4}\sin t$
Les solutions sont :
$x(t) = -\frac{1}{4}\sin t + Kcos(2t) + K\prime sin(2t)$
ou encore :

$$x(t) = -\frac{1}{4}\sin t + A\cos(2t + \phi)$$

Avec mêmes méthodes, on peut voir les exemples qui suivent :

Exemple 10

$$y" + 2y\prime + y = x + 1$$

les solutions sont :

$$y(x) = (Ax + B)e^{-x} + x - 1$$

Exemple 11

$$y" - 2y' + 2y = \sin x$$

les solutions sont :

$$y(x) = (K\cos x + K'\sin x)e^{x} + \frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)$$